

Точные решения для нестационарных изобарических течений вязкой несжимаемой жидкости в слое с проницаемыми границами и постоянной поперечной скоростью

К. В. Губарева^{✉1}, Е. Ю. Просвирыков^{2,3}, А. В. Еремин¹

¹Самарский государственный технический университет
443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

²Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина
620062, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

³Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук
620049, Россия, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34

Аннотация. Исследование точных решений уравнений Навье–Стокса остается важной задачей механики жидкости, поскольку такие решения служат эталоном для верификации численных методов и позволяют выявить фундаментальные закономерности течений. Особый интерес представляют трехмерные нестационарные изобарические течения с постоянной поперечной скоростью, моделирующие процессы фильтрации и движения жидкости в слоях с проницаемыми границами.

Цель исследования. Провести полный анализ совместности переопределенной системы уравнений Навье–Стокса для трехмерных нестационарных изобарических течений с постоянной поперечной скоростью в слое с проницаемыми границами, осуществить ее редукцию к разрешимой системе и построить новые семейства точных решений.

Методы. Анализ условий совместности переопределенных систем дифференциальных уравнений, метод характеристик для линейных уравнений в частных производных, редукция к связанным параболическим уравнениям, построение полиномиальных и автомодельных решений, преобразование Галилея для сведения к уравнению теплопроводности, численная визуализация в среде MATLAB с параметрами воды при 20 °С.

Результаты. Выведены условия совместности, приводящие к линейной функциональной зависимости между горизонтальными компонентами скорости. Исходная переопределенная система сведена к паре квазилинейных параболических уравнений. Построены новые классы точных решений: полиномиальные по характеристической переменной, обобщающие сдвиговые течения, а также автомодельные решения типа движущегося и диффундирующего гауссова импульса, описывающие эволюцию локализованных возмущений. Проведен анализ предельного перехода к идеальной жидкости.

Выводы. Впервые получены точные решения, описывающие трехмерные нестационарные течения вязкой жидкости с постоянной поперечной скоростью. Результаты вносят вклад в теорию слоистых течений и могут быть использованы для верификации численных методов вычислительной гидродинамики.

Ключевые слова: изобарическое течение, постоянная поперечная скорость, условия совместности, точные решения, редукция уравнений Навье–Стокса, слоистые течения, автомодельные решения

Поступила 10.03.2026, одобрена после рецензирования 05.05.2026, принята к публикации 07.08.2026

Для цитирования. Губарева К. В., Просвирыков Е. Ю., Еремин А. В. Точные решения для нестационарных изобарических течений вязкой несжимаемой жидкости в слое с проницаемыми границами и постоянной поперечной скоростью // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2026. Т. 28. № 4. С. 33–45. DOI: 10.35330/1991-6639-2026-28-4-33-45

Exact solutions for unsteady isobaric flows of a viscous incompressible fluid in a layer with permeable boundaries and a constant transverse velocity

K.V. Gubareva^{✉1}, E.Yu. Prosviryakov^{2,3}, A.V. Eremin¹

¹Samara State Technical University

244, Molodogvardeyskaya street, Samara, 443100, Russia

²Ural Federal University

19, Mira street, Ekaterinburg, 620002, Russia

³Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences

34, Komsomolskaya street, Ekaterinburg, 620049, Russia

Abstract. The study of exact solutions to the Navier–Stokes equations remains an important task in fluid mechanics, as such solutions serve as a benchmark for verifying numerical methods and reveal fundamental flow patterns. Of particular interest are three-dimensional unsteady isobaric flows with constant transverse velocity, which model filtration processes and fluid motion in layers with permeable boundaries.

Aim. To perform a complete compatibility analysis of the overdetermined system of Navier–Stokes equations for three-dimensional unsteady isobaric flows with a constant transverse velocity in a layer with permeable boundaries, reduce it to a solvable system, and construct new families of exact solutions.

Methods. Compatibility analysis of overdetermined systems of partial differential equations, the method of characteristics for linear partial differential equations, reduction to coupled parabolic equations, construction of polynomial and self-similar solutions, the Galilean transformation for reduction to the heat equation, and numerical visualization in MATLAB using the parameters of water at 20°C.

Results. Compatibility conditions are derived, leading to a linear functional relationship between the horizontal velocity components. The original overdetermined system is reduced to a pair of quasilinear parabolic equations. New classes of exact solutions have been constructed: polynomial solutions in the characteristic variable, which generalize shear flows, as well as self-similar solutions of the moving and diffusing Gaussian pulse type that describe the evolution of localized perturbations. An analysis of the limit transition to an ideal fluid is performed.

Conclusions. For the first time, exact solutions describing three-dimensional unsteady viscous fluid flows with a constant transverse velocity have been obtained. The results contribute to the theory of layered flows and can be used to verify numerical methods in computational fluid dynamics (CFD).

Keywords: isobaric flow, constant transverse velocity, compatibility conditions, exact solutions, reduction of Navier–Stokes equations, layered flows, self-similar solutions

Submitted 10.03.2026,

approved after reviewing 05.05.2026,

accepted for publication 07.08.2026

For citation. Gubareva K.V., Prosviryakov E.Yu., Eremin A.V. Exact solutions for unsteady isobaric flows of a viscous incompressible fluid in a layer with permeable boundaries and a constant transverse velocity. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS*. 2026. Vol. 28. No. 4. Pp. 33–45. DOI: 10.35330/1991-6639-2026-28-4-33-45

ВВЕДЕНИЕ

Уравнения Навье–Стокса, описывающие движение вязкой несжимаемой жидкости, представляют собой фундаментальную, но чрезвычайно сложную для анализа систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Несмотря на более



чем двухвековую историю их изучения, проблема построения точных аналитических решений в трехмерном нестационарном случае остается открытой и исключительно актуальной. Как отмечено в классических монографиях [1, 2], точные решения позволяют не только глубже понять физическую природу течений, но и служат незаменимым инструментом для тестирования численных алгоритмов, используемых в современной вычислительной гидродинамике [3]. Без таких эталонных решений невозможно оценить точность и сходимость приближенных методов, что особенно важно при моделировании сложных течений в промышленных и природных процессах.

Среди многообразия гидродинамических задач особое место занимают изобарические течения, в которых давление постоянно во всем объеме жидкости. Такие течения возникают, например, при движении жидкости под действием инерционных и вязких сил в отсутствие внешнего перепада давления, а также в некоторых приближениях геофизической гидродинамики [4–6]. Исторически первые точные решения для стационарных течений Пуазейля и Куэтта были получены именно в предположении постоянства или линейной зависимости давления в классических работах XIX века. Однако в трехмерной нестационарной постановке система становится переопределенной, что требует дополнительного анализа условий совместности. Методы анализа таких систем и построения точных решений развиты в работах [5–9].

Систематическое исследование точных решений уравнений Навье–Стокса активно развивается в работах как отечественных, так и зарубежных авторов. Фундаментальные результаты получены в [5–13]. В частности, в [5, 6] рассмотрены вихревые течения и течения во вращающихся слоях, в [7] – сдвиговые течения Куэтта, в [8] – точные решения для уравнений термодиффузии, в [9–11] предложены методы построения решений с линейной зависимостью скорости от координат, в [12, 13] изучены новые эффекты, связанные с колебаниями момента импульса. В последние годы значительный прогресс достигнут в построении решений для слоистых и вертикально завихренных течений [14–17], течений с проницаемыми границами [18–21], а также для бинарных жидкостей и термодиффузионных процессов [22–25]. Особо следует отметить работы [14–17, 21], где разработаны методы редукции и получены многочисленные классы точных решений для широкого круга гидродинамических моделей, включая трехмерные нестационарные течения.

Важным направлением является исследование течений в слоях с проницаемыми границами, которые моделируют процессы фильтрации, мембранного разделения, движения жидкости в пористых средах и биологических системах. Классические работы [18–20] заложили основы теории ламинарных течений с отсосом и вдувом через стенки. Дальнейшее развитие эти идеи получили в [21, 25], где построены точные решения для каналов с проницаемыми стенками при различных граничных условиях. Однако большинство известных решений относятся либо к стационарным, либо к двумерным течениям. Трехмерные нестационарные изобарические течения с постоянной поперечной скоростью оставались малоизученными, несмотря на их важность для приложений.

Настоящая работа продолжает это направление и посвящена анализу трехмерных нестационарных изобарических течений с дополнительным кинематическим условием – постоянством поперечной скорости. Такая постановка обобщает классические задачи о течениях в каналах с проницаемыми стенками [18–20] и находит применение при моделировании процессов фильтрации, мембранного разделения, а также в геофизической гидродинамике [6]. Кроме того, полученные решения могут служить основой для верификации численных методов, применяемых в современных вычислительных комплексах [3, 24].

Целью данной работы является проведение полного анализа совместности переопределенной системы уравнений Навье–Стокса для указанного класса течений, осуществление ее редукции к разрешимой системе и построение новых семейств точных решений, включая полиномиальные и локализованные автомодельные течения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном плоском слое. В декартовых координатах (x, y, z) уравнения Навье–Стокса для поля скорости (V_x, V_y, V_z) и давления P имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{V}, \nabla \cdot \mathbf{V} = 0,$$

где ν – кинематическая вязкость, ρ – плотность. В предположении изобаричности течения градиент давления отсутствует: $\nabla P = 0$. В нестационарных течениях вязкая диссипация компенсируется убыванием кинетической энергии со временем (амплитуда решений убывает как $\sim 1/t$), а перенос импульса через проницаемые границы при постоянной поперечной скорости может служить дополнительным источником или стоком энергии, что делает изобарическое приближение физически обоснованным. Дополнительно полагаем, что поперечная компонента скорости постоянна: $V_z = w_0 = \text{const}$. Это условие соответствует равномерному просачиванию жидкости через проницаемые границы слоя. Следует подчеркнуть, что условие $V_z = w_0 = \text{const}$ задает лишь вертикальную составляющую скорости на проницаемых границах $z = \text{const}$. Граничные условия для горизонтальных компонент скорости V_x и V_y на этих границах в рамках данной работы не фиксируются жестко, поскольку проницаемость границ не накладывает автоматических условий прилипания или проскальзывания на касательные компоненты. Физически это соответствует ситуации, когда проходящая через границу жидкость может сохранять касательный импульс, величина которого определяется внешними факторами (интенсивностью вдува/отсоса, характеристиками внешнего потока). Такой подход позволяет при построении конкретных классов точных решений использовать возникающие произвольные функции и постоянные для удовлетворения различным типам граничных условий (прилипание, проскальзывание, заданное касательное напряжение) в зависимости от конкретной физической задачи. Тогда система упрощается до двух уравнений для горизонтальных компонент:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + w_0 \frac{\partial V_x}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + w_0 \frac{\partial V_y}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right), \quad (2)$$

при условии неразрывности

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Таким образом, имеем три уравнения для двух неизвестных функций V_x, V_y , что делает систему переопределенной. Возникает задача о нахождении условий, при которых такая система совместна.

УСЛОВИЯ СОВМЕСТИНОСТИ И РЕДУКЦИЯ

Продифференцируем (1) по x , а (2) по y и сложим. Используя (3), после преобразований получаем соотношение

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \frac{\partial V_y}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

которое представляет собой обращение в нуль якобиана отображения $(x, y) \rightarrow (V_x, V_y)$ при фиксированных z, t . Следовательно, компоненты скорости функционально зависимы:

$$V_y = F(V_x, z, t). \quad (5)$$

Подстановка (5) в (1)–(2) и анализ полученных уравнений приводит к условиям на функцию F . Требование совместности при произвольном поле V_x дает два соотношения:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial V_x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial V_x \partial z} = 0. \quad (6)$$

Условия (6) означают, что функция F линейна по V_x . Таким образом, получаем

$$F(V_x, z, t) = k(z, t) V_x + h(z, t). \quad (7)$$

Коэффициенты k и h удовлетворяют одинаковым линейным параболическим уравнениям:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + w_0 \frac{\partial k}{\partial z} = v \frac{\partial^2 k}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + w_0 \frac{\partial h}{\partial z} = v \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}. \quad (8)$$

Уравнения (8) описывают конвективно-диффузионный перенос этих коэффициентов в поперечном направлении. Уравнение неразрывности (3) с учетом (5) и (7) принимает вид

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + k(z, t) \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) является линейным уравнением в частных производных первого порядка. Его решение записывается через характеристическую переменную $\xi = y - K(z, t)x$, где $\partial K / \partial x = k(z, t)$. Для дальнейшего анализа ограничимся случаем постоянного коэффициента $k(z, t) = K_0 = \text{const}$, что соответствует однородной связи между компонентами скорости. Тогда $\xi = y - K_0 x$, и поле скорости можно представить как

$$V_x = U(\xi, z, t), \quad V_y = K_0 U(\xi, z, t) + W(z, t), \quad (10)$$

где $W(z, t) = h(z, t)$. Подстановка (10) в исходное уравнение (1) приводит к системе двух уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + w_0 \frac{\partial U}{\partial z} + W \frac{\partial U}{\partial \xi} = v \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right), \quad (11)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + w_0 \frac{\partial W}{\partial z} = v \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}. \quad (12)$$

Уравнение (12) для W является независимым и описывает конвективно-диффузионный перенос в поперечном направлении. После его решения уравнение (11) становится линейным относительно U и может быть исследовано аналитически.

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим случай, когда функция W линейна по координате z : $W(z,t) = \alpha(t) z + \beta(t)$. Подстановка в (12) дает

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \frac{d\beta}{dt} + w_0\alpha = 0,$$

откуда $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$, $\beta(t) = \beta_0 - w_0\alpha_0 t$. Таким образом, $W(z,t) = \alpha_0 z + \beta_0 - w_0\alpha_0 t$.

Решение для U будем искать в виде полинома конечной степени N по переменной ξ :

$$U(\xi, z, t) = \sum_{n=0}^N \frac{a_n(z,t)}{n!} \xi^n. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (11) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ξ , получаем рекуррентную систему уравнений для функций $a_n(z,t)$:

$$\frac{\partial a_n}{\partial t} + w_0 \frac{\partial a_n}{\partial z} + W(z,t)a_{n+1} = v \left(\frac{\partial^2 a_n}{\partial z^2} + a_{n+2} \right), n = 0, 1, \dots, N-2, \quad (14)$$

$$\frac{\partial a_{N-1}}{\partial t} + w_0 \frac{\partial a_{N-1}}{\partial z} + W(z,t)a_N = v \frac{\partial^2 a_{N-1}}{\partial z^2}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial a_N}{\partial t} + w_0 \frac{\partial a_N}{\partial z} = v \frac{\partial^2 a_N}{\partial z^2}. \quad (16)$$

Система решается последовательно, начиная с уравнения (16) для старшего коэффициента. Уравнения (14)–(15) позволяют определить младшие коэффициенты. При $N = 1$ получаем решение, обобщающее классический сдвиговый поток. На рисунке 1 представлены профили V_x и V_y для линейного случая ($N = 1$) в сечении $z = 0$ при $t = 0$. Изолинии подчеркивают линейную зависимость от ξ .

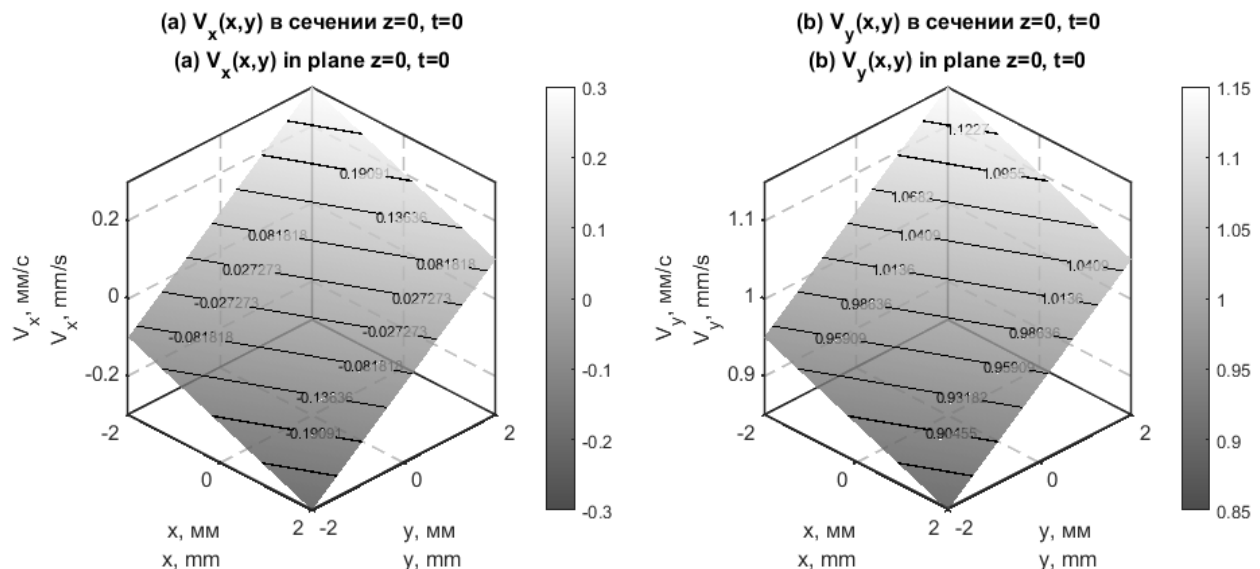


Рис. 1. Полиномиальное течение (линейный профиль): (a) $V_x(x,y)$, (b) $V_y(x,y)$ в сечении $z = 0$, $t = 0$.
Параметры: $K_0 = 0.5$, $W_0 = 1$ мм/с, $a_1 = 0.1$ с⁻¹

Fig. 1. Polynomial flow (linear profile): (a) $V_x(x,y)$, (b) $V_y(x,y)$ in the cross-section $z = 0$, $t = 0$.
Parameters: $K_0 = 0.5$, $W_0 = 1$ mm/s, $a_1 = 0.1$ s⁻¹

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ И ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ

В случае постоянной функции $W(z, t) = W_0 = \text{const}$ уравнение (11) упрощается:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + w_0 \frac{\partial U}{\partial z} + W_0 \frac{\partial U}{\partial \xi} = \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right). \quad (17)$$

С помощью преобразования Галилея

$$\eta = \xi - W_0 t, \zeta = z - w_0 t, \tau = t$$

уравнение (17) сводится к двумерному уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} \right). \quad (18)$$

Фундаментальное решение уравнения (18), соответствующее точечному начальному возмущению, имеет вид гауссова импульса:

$$U(\eta, \zeta, \tau) = \frac{Q}{4\pi\nu\tau} \exp\left(-\frac{\eta^2 + \zeta^2}{4\nu\tau}\right). \quad (19)$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем точное решение исходной задачи:

$$V_x(x, y, z, t) = \frac{Q}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{(y - K_0 x - W_0 t)^2 + (z - w_0 t)^2}{4\nu t}\right), \quad (20)$$

$$V_y(x, y, z, t) = K_0 V_x(x, y, z, t) + W_0. \quad (21)$$

Это решение описывает эволюцию локализованного возмущения, которое движется с постоянными скоростями W_0 в направлении y и w_0 в направлении z , одновременно расплываясь за счет вязкости. Амплитуда убывает как $1/t$, а ширина растет пропорционально $\sqrt{\nu t}$.

На рисунке 2 показана эволюция такого возмущения вдоль оси x для трех последовательных моментов времени. Графики построены для фиксированных $y = 0, z = 0$; из-за движения центра амплитуда в этом сечении несколько занижена по сравнению с истинным центром.

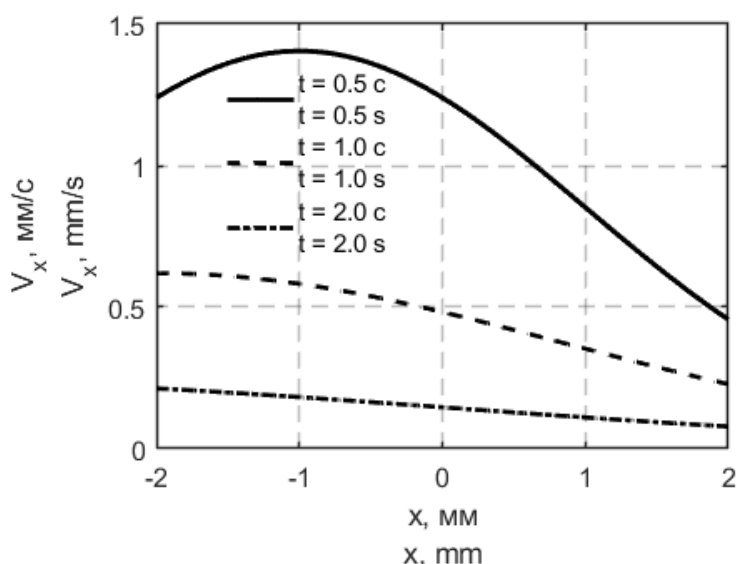


Рис. 2. Эволюция локализованного возмущения вдоль оси x при $y = 0, z = 0$ в моменты $t = 0.5, 1.0, 2.0$ с. Параметры: $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $Q = 10^{-8} \text{ м}^3/\text{с}$, $w_0 = 1 \text{ мм/с}$, $W_0 = 1 \text{ мм/с}$, $K_0 = 0.5$

Fig. 2. Evolution of a localized perturbation along the x -axis at $y = 0, z = 0$ at times $t = 0.5, 1.0, 2.0$ s. Parameters: $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $Q = 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}$, $w_0 = 1 \text{ mm/s}$, $W_0 = 1 \text{ mm/s}$, $K_0 = 0.5$

Пространственная структура возмущения в момент $t = 1$ с представлена на рисунке 3 в двух ортогональных сечениях. Черным крестом отмечено положение центра, координаты которого $\left(-\frac{W_0 t}{K_0}, W_0 t, w_0 t\right)$ полностью соответствуют теоретическим. Синхронизированные цветовые шкалы позволяют сравнить интенсивность в разных плоскостях.

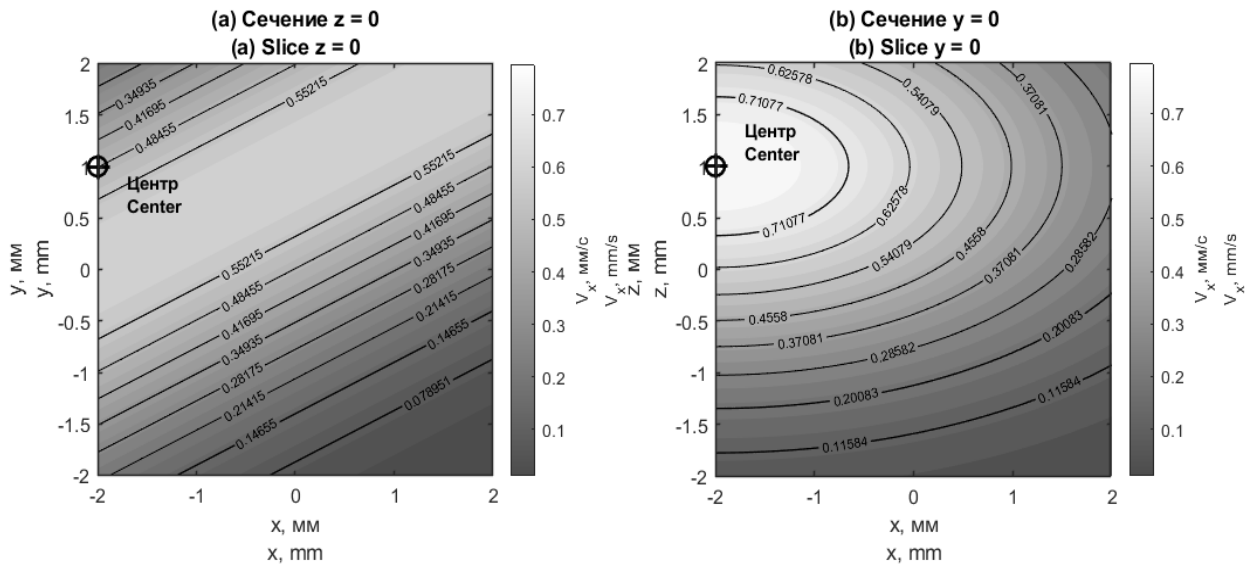


Рис. 3. Локализованное возмущение в момент $t = 1$ с: (а) сечение $z = 0$, (б) сечение $y = 0$

Fig. 3. Localized perturbation at $t = 1$ s: (a) cross-section $z = 0$, (b) cross-section $y = 0$

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД К ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В пределе $\nu \rightarrow 0$ уравнения (11)–(12) переходят в уравнения переноса:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + w_0 \frac{\partial U}{\partial z} + W \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} + w_0 \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

Общее решение для U имеет вид $U = \Psi(\xi - Wt, z - w_0 t)$, где Ψ – произвольная функция. В идеальной жидкости начальное возмущение переносится без изменения формы. На рисунке 4 сопоставлены решение для вязкой жидкости и решение в приближении идеальной жидкости для гауссова импульса с начальной полушириной $\sigma_0 = 0.2$ мм и амплитудой 1 мм/с в момент $t = 1$ с. Решение, соответствующее вязкой жидкости, демонстрирует существенное уширение и падение амплитуды до 0.14 мм/с, тогда как решение для идеальной жидкости сохраняет исходные параметры.

Важно отметить, что в данной постановке классический пограничный слой не формируется, поскольку постоянный поперечный перенос массы ($V_z = w_0$) изменяет структуру течения у стенки по сравнению со случаем непроницаемых границ. Решение остается регулярным при $\nu \rightarrow 0$, переходя в уравнения переноса идеальной жидкости. Отсутствие градиента давления ($\nabla P = 0$) означает отсутствие сил давления на границы, а вязкие напряжения стремятся к нулю вместе с ν . Это согласуется с фундаментальными свойствами идеальной жидкости, где сопротивление течению отсутствует (в аналогии с парадоксом Даламбера – Эйлера). Кинематическое условие на проницаемой границе ($V_z = w_0$) остается справедливым и в идеальном случае, определяя перенос возмущений без их диссипации.



Рис. 4. Сравнение решений для вязкой и идеальной жидкости: гауссов импульс при $t = 1$ с.
Начальная полуширина $\sigma_0 = 0.2$ мм, амплитуда 1 мм/с

Fig. 4. Comparison of solutions for the viscous and ideal fluids: Gaussian pulse $t = 1$ s.
Initial half-width $\sigma_0 = 0.2$ mm, amplitude 1 mm/s

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведен систематический анализ трехмерных нестационарных изобарических течений вязкой несжимаемой жидкости с постоянной поперечной скоростью. Основной результат состоит в редукции исходной переопределенной системы уравнений Навье–Стокса к паре связанных параболических уравнений на основе выведенных условий совместности. Показано, что функциональная зависимость между горизонтальными компонентами скорости необходимо является линейной, а ее коэффициенты подчиняются уравнению конвекции-диффузии.

Новизна работы заключается в построении новых классов точных решений редуцированной системы. Впервые получены полиномиальные по характеристической переменной решения, обобщающие сдвиговые течения на случай нестационарной трехмерной геометрии. Также в явном виде найдено автомодельное решение типа движущегося гауссова импульса, которое описывает эволюцию локализованных возмущений в поле постоянно-го поперечного переноса. Это решение демонстрирует характерную для двумерной диффузии зависимость амплитуды от времени, что качественно отличается от одномерного случая и полностью соответствует редуцированной модели.

Достоверность полученных результатов подтверждена численными расчетами в среде MATLAB с использованием физических параметров воды при 20 °С, которые полностью воспроизводят аналитические зависимости. Представленные графические материалы наглядно иллюстрируют структуру течений и влияние вязкости на эволюцию возмущений.

Практическая значимость работы определяется возможностью использования построенных точных решений в качестве тестовых примеров для верификации численных методов и вычислительных алгоритмов, применяемых при моделировании трехмерных течений со сложной кинематикой.

Дальнейшее развитие исследования может быть направлено на учет переменного коэффициента $k(z,t)$ в соотношении (7), что позволит описать более широкий класс течений, а также на включение эффектов стратификации или неоднородной проницаемости границ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 760 с.
3. Temam R. Navier–Stokes equations: theory and numerical analysis. Amsterdam: North-Holland, 2001. 500 p.
4. Drazin P. G., Riley N. The Navier–Stokes equations: a classification of flows and exact solutions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. 196 p.
5. Пухначев В. В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // Успехи механики. 2006. № 1. С. 6–76.
6. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Пермь: Изд-во Пермск. гос. ун-та, 2006. 155 с.
7. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. Неоднородные течения Куэтта // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. Вып. 2. С. 177–182. DOI: 10.20537/nd1402004
8. Turkyilmazoglu M. Exact solutions for the incompressible viscous fluid of a porous rotating disk flow // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2009. Vol. 44. Pp. 352–357. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2008.12.007
9. Полянин А. Д., Журов А. И. Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. М.: Изд-во «ИПМех РАН», 2020. 384 с.
10. Полянин А. Д., Аристов С. Н. Новый метод построения точных решений трехмерных уравнений Навье–Стокса и Эйлера // Теоретические основы химической технологии. 2011. Т. 45. № 6. С. 696–701.
11. Wang C. Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations // Appl. Mech. Rev. 1989. Vol. 42 (11S). Pp. 269–282. DOI: 10.1115/1.3152400
12. Wang C.Y. Exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations // Annu. Rev. Fluid Mech. 1991. Vol. 23. P. 159–177. DOI: 10.1146/annurev.fl.23.010191.001111
13. Bogoyavlenskij O. The new effect of oscillations of the total angular momentum vector of viscous fluid // Physics Fluids. 2022. Vol. 34. 083108. DOI: 10.1063/5.0101870
14. Zatorska M.B., Banks W.H.H. New solutions for flow in a channel with porous walls and/or non-rigid walls // Fluid Dynamics Research. 2003. Vol. 33. No. 1–2. P. 57–71. DOI: 10.1016/S0169-5983(03)00044-3
15. Baron A. Exact solutions to the three-dimensional Navier–Stokes equations based on the stream function approach // Physics of Fluids. 2025. Vol. 37. No. 1. 013607. DOI: 10.1063/5.0245978
16. Goruleva L.S., Prosviryakov E.Yu. Exact Solutions to the Navier–Stokes equations for describing inhomogeneous isobaric vertical vortex fluid flows in regions with permeable boundaries // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. 2023. Iss. 1. Pp. 41–53. DOI: 10.17804/2410-9908.2023.1.041-053
17. Prosviryakov E.Y. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2019. Vol. 53. No. 1. Pp. 107–114. DOI: 10.1134/S0040579518060088.
18. Berman A.S. Laminar flow in channels with porous walls // J. Appl. Phys. 1953. Vol. 24. No. 9. Pp. 1232–1235. DOI: 10.1063/1.1721476
19. Yuan S.W. Further investigation of laminar flow in channels with porous walls // J. Appl. Phys. 1956. Vol. 27. Issue 3. P. 267. DOI: 10.1063/1.1722355

20. Резицер С. А. О приближенной теории течения вязкой несжимаемой жидкости в трубах с пористыми стенками // *Известия высших учебных заведений. Математика*. 1962. № 5. С. 65–74. <https://www.mathnet.ru/rus/ivm2101>
21. Zubarev N.M., Prosviryakov E.Y. Exact solutions for layered three-dimensional nonstationary isobaric flows of a viscous incompressible fluid // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2019. Vol. 60. No. 6. Pp. 1031–1037. DOI: 10.1134/S0021894419060075
22. Watson E.B.B., Banks W.H.H., Zaturka M.B., Drazin P.G. On transition to chaos in two-dimensional channel flow symmetrically driven by accelerating walls // *Journal of Fluid Mechanics*. 1990. Vol. 212. Pp. 451–485. DOI: 10.1017/S0022112090002051
23. Watson E.B.B., Banks W.H.H., Zaturka M.B., Drazin P.G. Laminar channel flow driven by accelerating walls // *European Journal of Applied Mathematics*. 1991. Vol. 2. No. 4. Pp. 359–385. DOI: 10.1017/S0956792500000607
24. Губарева К. В., Еремин А. В. Численное решение задачи теплопроводности в пористой пластине с топологией трижды периодических минимальных поверхностей // *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025. Т. 25. № 1. С. 23–31. DOI: 10.23947/2687-1653-2025-25-1-23-31
25. Сизых Г. Б. Течение пуазейлевского типа в канале с проницаемыми стенками // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*. 2022. Т. 26. № 1. С. 190–201. DOI: 10.14498/vsgtu1900

REFERENCES

1. Landau L.D., Lifshits E.M. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. Moscow: Nauka, 1986. 736 p. (In Russian)
2. Batchelor G.K. *Vvedenie v dinamiku zhidkosti* [Introduction to fluid dynamics]. Moscow: Mir, 1973. 760 p. (In Russian)
3. Temam R. *Navier–Stokes equations: theory and numerical analysis*. Amsterdam, North-Holland, 2001. 500 p.
4. Drazin P.G., Riley N. *The Navier–Stokes equations: a classification of flows and exact solutions*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2006. 196 p.
5. Pukhnachev V.V. *Simmetrii v uravneniyakh Nav'e–Stoksa* [Symmetries in the Navier–Stokes equations]. *Uspekhi mekhaniki*. 2006. No. 1. Pp. 6–76. (In Russian)
6. Aristov S.N., Shvarts K.G. *Vikhrevye techeniya advektivnoi prirody vo vrashchayushchemsya sloe zhidkosti* [Vortical flows of advective nature in a rotating fluid layer]. Perm: Perm State Univ., 2006. 155 p. (In Russian)
7. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. Inhomogeneous Couette flows. *Nelineinaya dinamika* [Russian Journal of Nonlinear Dynamics]. 2014. Vol. 10. No. 2. Pp. 177–182. DOI: 10.20537/nd1402004. (In Russian)
8. Turkyilmazoglu M. Exact solutions for the incompressible viscous fluid of a porous rotating disk flow. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2009. Vol. 44. Pp. 352–357. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2008.12.007
9. Polyanin A.D., Zhurov A.I. *Metody razdeleniya peremennykh i tochnye resheniya nelineinykh uravnenii matematicheskoi fiziki* [Methods of separation of variables and exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics]. Moscow, IPMekh RAN Publ., 2020. 384 p. (In Russian)
10. Polyanin A.D., Aristov S.N. A new method for constructing exact solutions of three-dimensional Navier–Stokes and Euler equations. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoi tekhnologii* [Theoretical Foundations of Chemical Engineering]. 2011. Vol. 45. No. 6. Pp. 696–701. (In Russian)
11. Wang C.Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations. *Appl. Mech. Rev.*, 1989. Vol. 42 (11S). Pp. 269–282. DOI: 10.1115/1.3152400

12. Wang C.Y. Exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1991. Vol. 23. Pp. 159–177. DOI: 10.1146/annurev.fl.23.010191.001111
13. Bogoyavlenskij O. The new effect of oscillations of the total angular momentum vector of viscous fluid. *Physics Fluids*. 2022. Vol. 34. 083108. DOI: 10.1063/5.0101870
14. Zaturka M.B., Banks W.H.H. New solutions for flow in a channel with porous walls and/or non-rigid walls. *Fluid Dynamics Research*. 2003. Vol. 33. No. 1–2. Pp. 57–71. DOI: 10.1016/S0169-5983(03)00044-3
15. Baron A. Exact solutions to the three-dimensional Navier–Stokes equations based on the stream function approach. *Physics of Fluids*. 2025. Vol. 37. No. 1. 013607. DOI: 10.1063/5.0245978
16. Goruleva L.S., Prosviryakov E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing inhomogeneous isobaric vertical vortex fluid flows in regions with permeable boundaries. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2023. Iss. 1. Pp. 41–53. DOI: 10.17804/2410-9908.2023.1.041-053
17. Prosviryakov E.Y. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2019. Vol. 53. No. 1. Pp. 107–114. DOI: 10.1134/S0040579518060088
18. Berman A.S. Laminar flow in channels with porous walls. *J. Appl. Phys.*, 1953. Vol. 24. No. 9. Pp. 1232–1235. DOI: 10.1063/1.1721476
19. Yuan S.W. Further investigation of laminar flow in channels with porous walls. *J. Appl. Phys.*, 1956. Vol. 27. Iss. 3. p. 267. DOI: 10.1063/1.1722355
20. Regirer S.A. On an approximate theory of viscous incompressible fluid flow in pipes with porous walls. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika* [Russian Mathematics]. 1962. No. 5. Pp. 65–74. (In Russian)
21. Zubarev N.M., Prosviryakov E.Y. Exact solutions for layered three-dimensional nonstationary isobaric flows of a viscous incompressible fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2019. Vol. 60. No. 6. Pp. 1031–1037. DOI: 10.1134/S0021894419060075
22. Watson E.B.B., Banks W.H.H., Zaturka M.B., Drazin P.G. On transition to chaos in two-dimensional channel flow symmetrically driven by accelerating walls. *Journal of Fluid Mechanics*. 1990. Vol. 212. Pp. 451–485. DOI: 10.1017/S0022112090002051
23. Watson E.B.B., Banks W.H.H., Zaturka M.B., Drazin P.G. Laminar channel flow driven by accelerating walls. *European Journal of Applied Mathematics*. 1991. Vol. 2. No. 4. Pp. 359–385. DOI: 10.1017/S0956792500000607
24. Gubareva K.V., Eremin A.V. *Chislennoe reshenie zadachi teploprovodnosti v poristoi plastine s topologiei trizhdy periodicheskikh minimal'nykh poverkhnostei* [Numerical solution of the heat conduction problem in a porous plate with the topology of triply periodic minimal surfaces]. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025. Vol. 25. No. 1. Pp. 23–31. DOI: 10.23947/2687-1653-2025-25-1-23-31. (In Russian)
25. Sizykh G.B. Poiseuille-type flow in a channel with permeable walls. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki* [Vestnik of Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences]. 2022. Vol. 26. No. 1. Pp. 190–201. DOI: 10.14498/vsgtu1900. (In Russian)

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflict of interest.

Финансирование. Исследование проведено без спонсорской поддержки.

Funding. The study was performed without external funding.

Информация об авторах

Губарева Кристина Владимировна, канд. техн. наук, доцент кафедры «Промышленная теплоэнергетика», Самарский государственный технический университет;

443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244;

r.kristina2017@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>, SPIN-код: 4171-9816

Просвиряков Евгений Юрьевич, д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры «Информационные технологии и системы управления» Института радиоэлектроники и информационных технологий – РТФ, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина;

620062, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19;

заведующий сектором нелинейной вихревой гидродинамики Института машиноведения имени Э. С. Горкунова, Уральское отделение Российской академии наук;

620049, Россия, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34;

evgen_pros@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>, SPIN-код: 3880-5690

Еремин Антон Владимирович, д-р техн. наук, доцент, проректор по научной работе, заведующий кафедрой «Промышленная теплоэнергетика», Самарский государственный технический университет;

443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244;

a.v.eremin@list.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2614-6329>, SPIN-код: 3892-0775

Information about the authors

Kristina V. Gubareva, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Industrial Thermal Power Engineering, Samara State Technical University;

244, Molodogvardeyskaya street, Samara, 443100, Russia;

r.kristina2017@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>, SPIN-code: 4171-9816

Evgenii Yu. Prosviryakov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Information Technology and Automation, Ural Federal University;

19, Mira street, Ekaterinburg, 620002, Russia;

Head of Sector, Sector of Nonlinear Vortex Hydrodynamics, Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences;

34, Komsomolskaya street, Ekaterinburg, 620049, Russia;

evgen_pros@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>, SPIN-code: 3880-5690

Anton V. Eremin, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Vice-Rector for Scientific Work, Head of the Department of Industrial Thermal Power Engineering, Samara State Technical University;

244, Molodogvardeyskaya street, Samara, 443100, Russia;

a.v.eremin@list.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2614-6329>, SPIN-code: 3892-0775