

Параметрический синтез непрерывных САУ с неоднозначными нелинейными характеристиками

Н. Л. Гречкин, Е. Ю. Ватаева✉

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
190000, Россия, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 67, лит. А

Аннотация. В современной теории автоматического управления широко распространены нелинейные элементы с неоднозначными (гистерезисными) характеристиками. Такие нелинейности характерны для магнитных усилителей, датчиков положения, электромеханических приводов и ряда других устройств. Классические методы параметрического синтеза, разработанные для линейных или однозначных нелинейных систем автоматического управления (САУ), в случае неоднозначных характеристик либо неприменимы напрямую, либо требуют сложных вычислений, либо не гарантируют достижения заданных показателей качества переходных процессов.

Цель исследования – демонстрация работоспособности предложенного алгоритма моделирования гладких гистерезисных характеристик при решении задачи параметрического синтеза на примере конкретной нелинейной САУ с гистерезисным элементом.

Методы. Для решения задачи параметрического синтеза непрерывной САУ применяется обобщенный метод Галеркина, также используется разработанный авторами алгоритм моделирования гладких гистерезисных характеристик.

Результаты. Получены конкретные значения параметров регулятора (k_1 , k_2 , T), при которых переходный процесс системы соответствует заданным показателям качества. Имитационное моделирование показало высокую степень совпадения реального поведения системы с синтезированными параметрами и желаемым программным движением, что свидетельствует о корректности и практической применимости данного подхода.

Выводы. Практическая значимость метода заключается в возможности его использования при проектировании регуляторов для радиотехнических, электромеханических и других систем с гистерезисными элементами. Предложенная методика существенно сокращает время расчета параметров, позволяет обеспечить требуемые динамические характеристики без привлечения сложных адаптивных или нелинейных корректирующих устройств и упрощает последующую техническую реализацию САУ.

Ключевые слова: гладкие гистерезисные характеристики, моделирование гистерезиса, коэффициент наклона, уровень насыщения, неоднозначные нелинейности, системы автоматического управления, люфт с насыщением, параметрический синтез

Поступила 10.03.2026, одобрена после рецензирования 27.04.2026, принята к публикации 11.06.2026

Для цитирования. Гречкин Н. Л., Ватаева Е. Ю. Параметрический синтез непрерывных САУ с неоднозначными нелинейными характеристиками // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2026. Т. 28. № 3. С. 23–33. DOI: 10.35330/1991-6639-2026-28-3-23-33

Parametric synthesis of continuous control systems with hysteresis nonlinearities

N.L. Grechkin, E.Yu. Vataeva✉

Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation
67, Lit. A, Bolshaya Morskaya street, Saint Petersburg, 190000, Russia

Abstract. In modern automatic control theory, nonlinear elements with ambiguous (hysteresis) characteristics are widely encountered. Such nonlinearities are typical of magnetic amplifiers, position sensors, electromechanical actuators, and a number of other devices. Classical methods of parametric synthesis developed for linear or single-valued nonlinear automatic control systems (ACS) are either not directly applicable to systems with ambiguous characteristics, require complex computations, or fail to guarantee the achievement of specified quality indicators of transient processes.

Aim. The aim of this study is to demonstrate the effectiveness of the proposed algorithm for modeling smooth hysteresis characteristics in solving the parametric synthesis problem, illustrated by the example of a specific nonlinear ACS containing a hysteresis element.

Methods. To solve the parametric synthesis problem for a continuous ACS, a generalized Galerkin method is applied; in addition, the algorithm for modeling smooth hysteresis characteristics developed by the authors is used.

Results. Specific values of the controller parameters (k_1 , k_2 , T) have been obtained that ensure the system's transient response meets the prescribed quality criteria. Simulation modeling has shown a high degree of agreement between the actual system behavior with the synthesized parameters and the desired reference motion, confirming both the correctness and the practical applicability of the proposed approach.

Conclusions. The practical significance of the method lies in its potential application in the design of controllers for radio engineering, electromechanical, and other systems that include hysteresis elements. The proposed methodology significantly reduces the time required for parameter calculation, enables achievement of the required dynamic characteristics without resorting to complex adaptive or nonlinear correction devices, and simplifies the subsequent technical implementation of automatic control systems.

Keywords: smooth hysteresis characteristics, hysteresis modeling, slope coefficient, saturation level, ambiguous nonlinearities, automatic control systems, backlash with saturation, parametric synthesis

Submitted 10.03.2026,

approved after reviewing 27.04.2026,

accepted for publication 11.06.2026

For citation. Grechkin N.L., Vataeva E.Yu. Parametric synthesis of continuous control systems with hysteresis nonlinearities. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS*. 2026. Vol. 28. No. 3. Pp. 23–33. DOI: 10.35330/1991-6639-2026-28-3-23-33

ВВЕДЕНИЕ

В современных САУ, используемых в радиотехнике, электромеханике и аэрокосмической технике, все шире применяются элементы с неоднозначными нелинейными характеристиками. Особое место среди них занимают гладкие гистерезисные нелинейности [1–3].



Content is available under license [Creative Commons Attribution 4.0 License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Такие характеристики характерны для магнитных усилителей, электромагнитных приводов, пьезоэлектрических и ферроэлектрических устройств, датчиков положения и многих других технических средств [4–6]. Отличительной особенностью неоднозначных нелинейностей является то, что величина выходного сигнала определяется не только текущим значением входа, но и направлением его изменения. Это существенно усложняет анализ и синтез систем управления.

Классические методы параметрического синтеза САУ, разработанные для линейных объектов или нелинейных, в большинстве случаев либо неприменимы при наличии гистерезиса, либо требуют значительных вычислительных затрат (сложных процедур численной оптимизации и многократного имитационного моделирования). Кроме того, такие подходы зачастую не обеспечивают гарантированного достижения требуемых показателей качества переходных процессов [7–9].

В работе [10] авторами был разработан алгоритм моделирования гладких гистерезисных характеристик, который позволяет формировать промежуточные ветви нелинейности в зависимости от характера изменения входного сигнала во времени. Рассмотрим применение методики на примере решения задачи синтеза параметров непрерывной САУ (рис. 1), содержащей неоднозначную нелинейную характеристику, представленную на рис. 2. Неоднозначная нелинейность представляет собой гладкую гистерезисную характеристику, промежуточные ветви которой меняют вид в зависимости от процесса на входе.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Требуется синтезировать параметры k_1 , k_2 , T , чтобы обеспечить следующие показатели качества в системе при входном ступенчатом воздействии: время переходного процесса $T_{н.н.}$ не более 3,5 с при 5 % коридоре установившегося значения, величина перерегулирования σ не более 25 %.

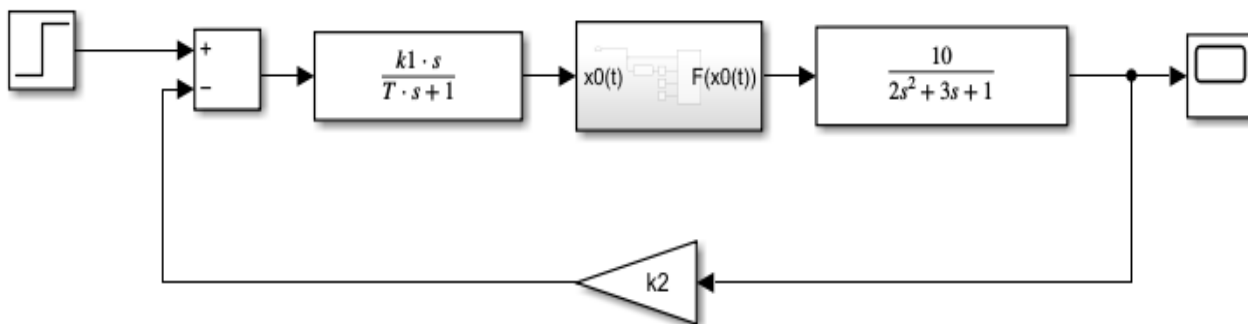


Рис. 1. Структурная схема синтезируемой САУ

Fig. 1. Block diagram of the synthesized automatic control system (ACS)

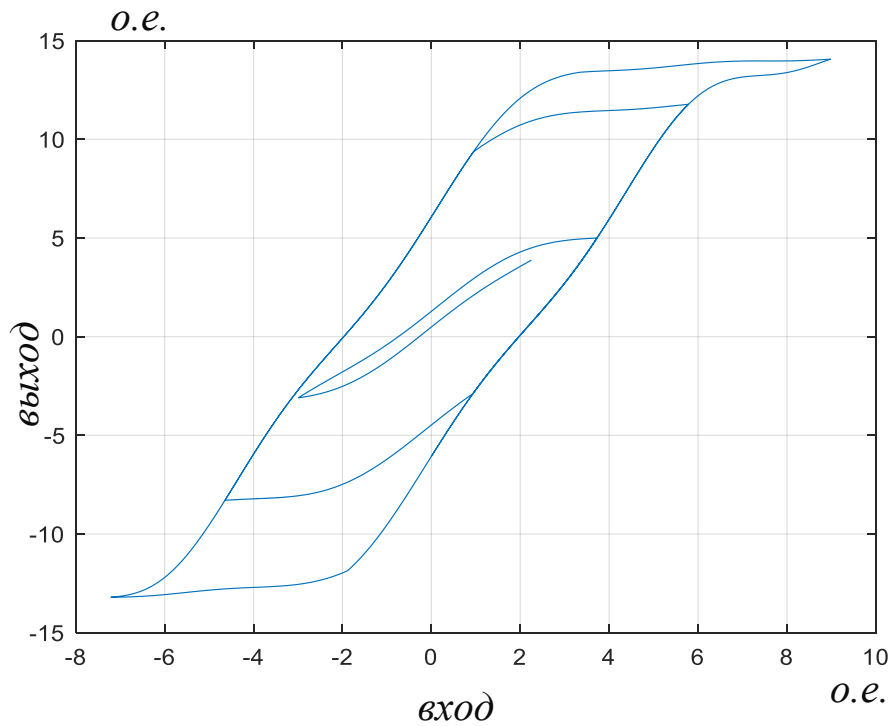


Рис. 2. Неоднозначная нелинейная характеристика

Fig. 2. Ambiguous nonlinear characteristic

Зададимся желаемым программным движением относительно входа нелинейности (рис. 3):

$$x_1^0(t) = (10,83 e^{(-1,2t)} \cos(2,89t - 0,3941))1(t).$$

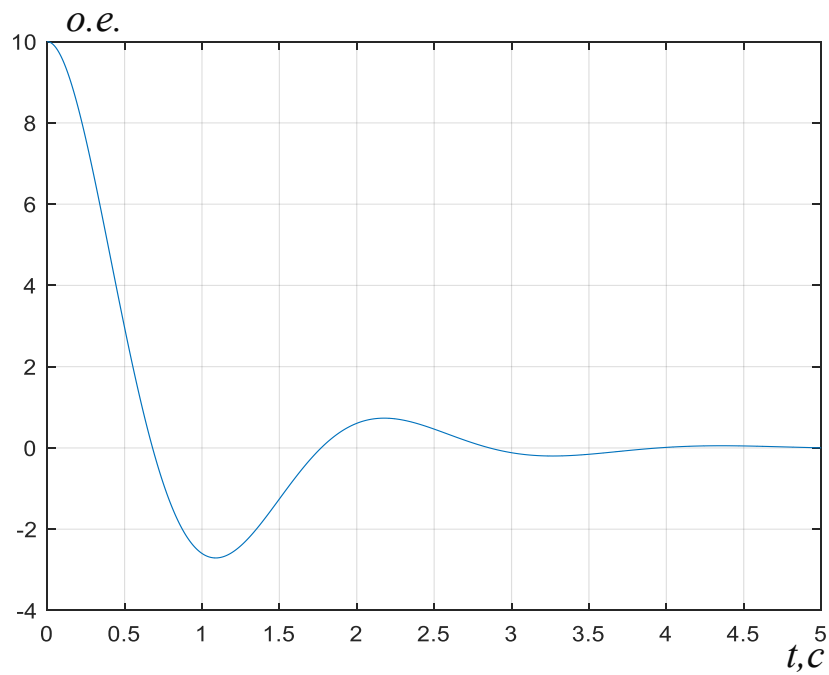


Рис. 3. Вид желаемого программного движения

Fig. 3. Desired program motion trajectory

На рис. 4 представлен процесс на выходе неоднозначной нелинейности, а на рис. 5 вид нелинейности после прохождения через нее выбранного желаемого программного движения.

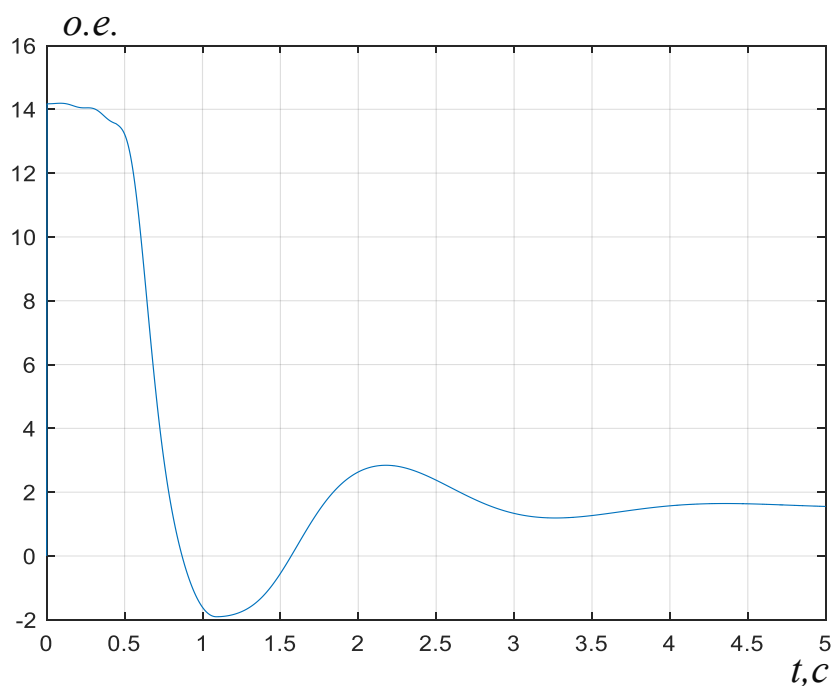


Рис. 4. Процесс на выходе неоднозначной нелинейности

Fig. 4. Output of the ambiguous nonlinearity

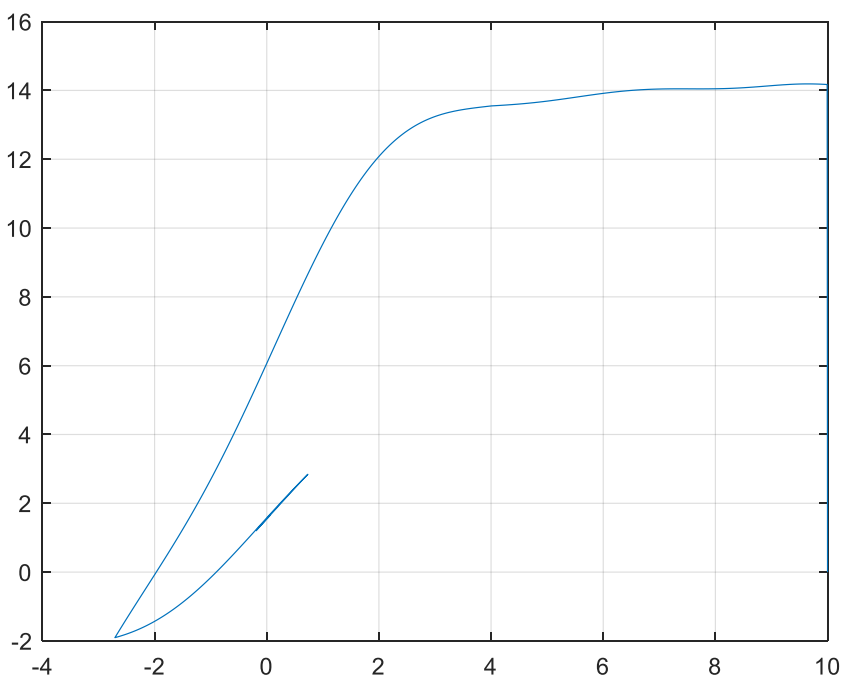


Рис. 5. Вид нелинейности после прохождения через нее выбранного желаемого программного движения

Fig. 5. Nonlinearity response to the selected desired program motion

Применяя подход [11], аппроксимируем процесс на выходе нелинейной характеристики с помощью полинома [12–14]. После $t=4$ с процесс можно считать установившимся и неизменным, установившаяся величина $x_y=1,572$. На рис. 6 представлена аппроксимация процесса на рис. 4 с помощью полинома девятой степени следующего вида:

$$y(x) = -0,409x^9 + 7,6924x^8 - 60,437x^7 + 255,8342x^6 - 625,4078x^5 + \\ + 872,4226x^4 - 630,63x^3 + 179,88x^2 - 14,3395x + 14,1345.$$

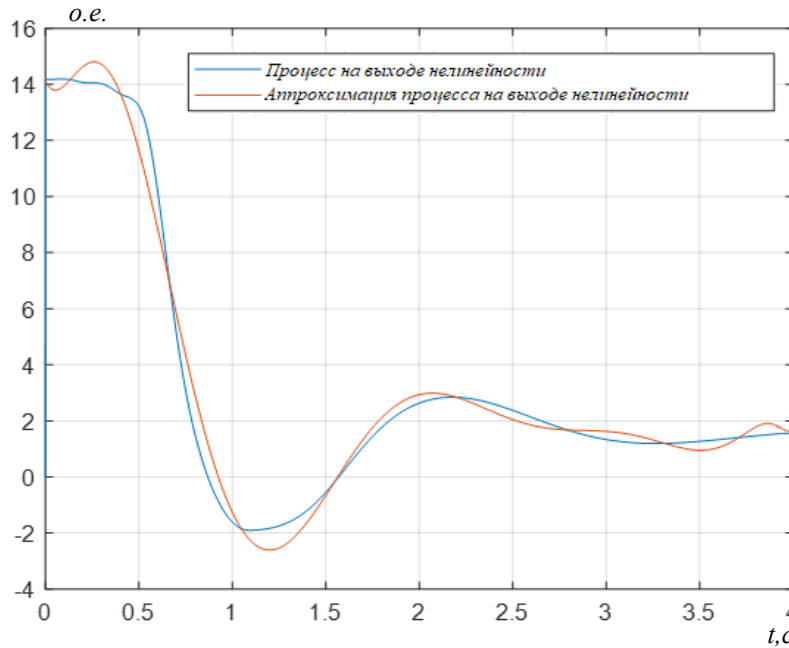


Рис. 6. Процесс на выходе неоднозначной нелинейности и его аппроксимация полиномом

Fig. 6. Output of the hysteresis nonlinearity and its polynomial approximation

Динамика системы будет описываться с помощью следующего дифференциального уравнения:

$$x^0(t)(2s^2 + 3s + 1)(Ts + 1) + F[x^0(t), \dot{x}^0(t)](10k_1k_2) = \\ = f(t)(2s^2 + 3s + 1)(k_1s).$$

Сформируем невязку:

$$\psi(c_k, t) = x^0(t)(2s^2 + 3s + 1)(Ts + 1) + F[x^0(t), \dot{x}^0(t)](10k_1k_2s) - \\ - f(t)(2s^2 + 3s + 1)(k_1s).$$

Значения искомых параметров определяются из ортогональности невязки координатным функциям:

$$\int_0^\infty \psi(c_k, t) \varphi_q(t) dt = \int_0^\infty (2s^2 + 3s + 1)(Ts + 1) x^0(t) \varphi_q(t) dt + \\ + \int_0^\infty (10k_1k_2s) F[x^0(t), \dot{x}^0(t)] \varphi_q(t) dt - \int_0^\infty (2s^2 + 3s + 1)(k_1s) f(t) \varphi_q(t) dt. \\ q = 1, 2, \dots, m.$$

С учетом интегралов Галеркина A_{qi} , C_{qi} и B_{qi} система примет вид:

$$\begin{aligned} (2T) A_{q3} + (3T + 2) A_{q2} + (T + 3) A_{q1} + A_{q0} + (10k_1 k_2) B_{q1} = \\ = (2k_1) C_{q3} + (3k_1) C_{q2} + (k_1) C_{q1}; \\ q = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Целевая функция для поисков параметров k_1 , k_2 и T примет вид:

$$\begin{aligned} J = \sum_{q=1}^3 \{ (2T) A_{q3} + (3T + 2) A_{q2} + (T + 3) A_{q1} + A_{q0} + (10k_1 k_2) B_{q1} - \\ - (2k_1) C_{q3} + (3k_1) C_{q2} + (k_1) C_{q1} \}^2. \end{aligned}$$

В результате минимизации полученной целевой функции были определены искомые параметры системы:

$$k_1 = 0,7; \quad k_2 = 0,35; \quad T = 0,6.$$

На рис. 7 представлены желаемый переходный процесс, а также переходный процесс в системе с синтезированными параметрами, который удовлетворяет заданным показателям качества.

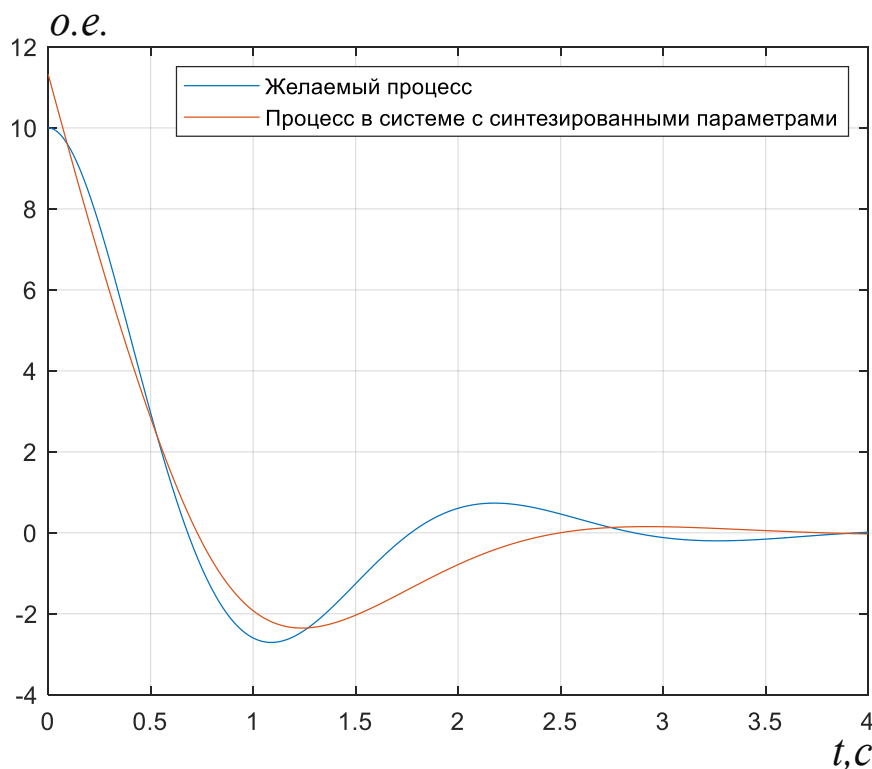


Рис. 7. Желаемое программное движение и переходный процесс в системе с синтезированными параметрами

Fig. 7. Desired program motion and transient process in the system with synthesized parameters

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено применение разработанного алгоритма моделирования гладких гистерезисных характеристик к задаче параметрического синтеза непрерывной нелинейной системы автоматического управления, содержащей неоднозначную нелинейность.

На примере синтеза параметров k_1 , k_2 , T регулятора показано, что использование предложенной методики позволяет получить значения параметров, при которых замкнутая система полностью удовлетворяет заданным требованиям качества переходного процесса (время регулирования не превышает 3,5 с, перерегулирование не превосходит 25 % при единичном ступенчатом воздействии).

Результаты имитационного моделирования подтверждают высокую степень совпадения реального переходного процесса в синтезированной системе с желаемым программным движением, что свидетельствует об эффективности и адекватности предложенного подхода.

Разработанная методика позволяет решать задачу параметрического синтеза САУ с гладкими гистерезисными нелинейностями без привлечения сложных адаптивных алгоритмов или ресурсоемких методов глобальной оптимизации. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании радиотехнических, электромеханических и аэрокосмических систем управления, содержащих элементы с выраженными гистерезисными свойствами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gao J., Xie X. A weighted switching sequence optimization algorithm for static output feedback control synthesis of nonlinear systems // *Applied Mathematics and Computation*. 2025. Vol. 489. P. 129152. DOI: 10.1016/j.amc.2024.129152
2. Mushtaq T., Seiler P., Maziar S. Hemati. On the convexity of static output feedback control synthesis for systems with lossless nonlinearities // *Automatica*. 2024. Vol. 159. P. 111380. DOI: 10.1016/j.automa.2023.111380
3. Huang W.-Ch., Sun H.-F., Zeng J.-P. Robust control synthesis of polynomial nonlinear systems using sum of squares technique // *Acta Automatica Sinica*. 2013. Vol. 39. No. 6. Pp. 799–805. DOI: 10.1016/S1874-1029(13)60055-5
4. Ding P., Chen K., Ou L. et al. Controller synthesis for a class of nonlinear systems with time delay based on stability region of PID controllers // *ISA Transactions*. 2025. Vol. 162. Pp. 85–94. DOI: 10.1016/j.isatra.2025.04.015
5. Do H.-T., Blanchini F., Prodan I. Nonlinear constrained control systems // In: Zhengtao Ding, ed. *Encyclopedia of Systems and Control Engineering*, Elsevier. 2026. Pp. 112–128. DOI: 10.1016/B978-0-443-14081-5.00165-3
6. Рысин А. В. Использование математических моделей элементов воздушных линий электропередачи для диагностики оборудования // *Известия высших учебных заведений. Приборостроение*. 2025. Т. 68. № 6. С. 557–561. DOI: 10.17586/0021-3454-2025-68-6-557-561
7. Pepe P. Nonlinear systems with delays // In: Zhengtao Ding, ed. *Encyclopedia of Systems and Control Engineering*. Elsevier. 2026. Pp. 44–60. ISBN: 978-0-443-14080-8. DOI: 10.1016/B978-0-443-14081-5.00154-9
8. Ferrara A., Incremona G.P. Nonlinear sliding mode control // In: Zhengtao Ding, ed. *Encyclopedia of Systems and Control Engineering*. Elsevier. 2026. Pp. 100–111. DOI: 10.1016/B978-0-443-14081-5.00146-X

9. Cissé A., Boutayeb M. On state feedback control of a class of nonlinear PDE systems in finite dimension. *Communications // Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2024. Vol. 130. P. 107751. DOI: 10.1016/j.cnsns.2023.107751
10. Гречкин Н. Л., Ватаева Е. Ю. О моделировании гистерезисных характеристик в задачах синтеза нелинейных систем автоматического управления // *Инженерный вестник Дона*. 2026. № 1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2026/10677 (доступ свободный).
11. Никитин А. В., Шишляков В. Ф. Параметрический синтез нелинейных систем автоматического управления. СПб: СПбГУАП, 2003. 358 с.
12. Шишляков В. Ф., Ватаева Е. Ю., Гречкин Н. Л., Шишляков Д. В. Применение полиномиальной аппроксимации в решении задач синтеза нелинейных САУ // *Датчики и системы*. 2023. № 4-2(270). С. 10–12. DOI: 10.25728/datsys.2023.4.2.2
13. Шишляков В. Ф., Ватаева Е. Ю., Гречкин Н. Л., Шишляков Д. В. Параметрический синтез потенциометрической маломощной следящей системы // *Датчики и системы*. 2023. № 4-1(269). С. 5–9. DOI: 10.25728/datsys.2023.4.1.1
14. Гречкин Н. Л., Ватаева Е. Ю., Шишляков В. Ф. Алгоритм вычисления точек переключения нелинейности «двухпозиционное реле с гистерезисом» // *Радиотехника*. 2024. Т. 88. № 8. С. 24–34. DOI: 10.18127/j00338486-202408-03
15. Гречкин Н. Л. Параметрический синтез систем автоматического управления с неоднозначными характеристиками // *Инженерный вестник Дона*. 2026. № 1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2026/10678 (доступ свободный).

REFERENCES

1. Gao J., Xie X. A weighted switching sequence optimization algorithm for static output feedback control synthesis of nonlinear systems. *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 489. 2025. P. 129152. DOI: 10.1016/j.amc.2024.129152
2. Mushtaq T., Seiler P., Maziar S. Hemati. On the convexity of static output feedback control synthesis for systems with lossless nonlinearities. *Automatica*. Vol. 159. 2024. P. 111380. DOI: 10.1016/j.automatica.2023.111380
3. Huang W.-Ch., Sun H.-F., Zeng J.-P. Robust control synthesis of polynomial nonlinear systems using sum of squares technique. *Acta Automatica Sinica*. Vol. 39. No. 6. 2013. Pp. 799–805. DOI: 10.1016/S1874-1029(13)60055-5
4. Ding P., Chen K., Ou L. et al. Controller synthesis for a class of nonlinear systems with time delay based on stability region of PID controllers. *ISA Transactions*. Vol. 162. 2025. Pp. 85–94. DOI: 10.1016/j.isatra.2025.04.015
5. Do H.-T., Blanchini F., Prodan I. Nonlinear constrained control systems. In: Zhengtao Ding, ed. *Encyclopedia of Systems and Control Engineering*. 1st ed. Elsevier. 2026. Pp. 112–128. DOI: 10.1016/B978-0-443-14081-5.00165-3
6. Rysin A.V. The use of mathematical models of overhead power transmission line elements for equipment. *Journal of Instrument Engineering*. 2025. Vol. 68. No. 6. Pp. 557–561. DOI: 10.17586/0021-3454-2025-68-6-557-561. (In Russian)
7. Pepe P. Nonlinear systems with delays. In: Zhengtao Ding, ed. *Encyclopedia of Systems and Control Engineering*, Elsevier. 2026. Pp. 44–60. ISBN: 978-0-443-14080-8. DOI: 10.1016/B978-0-443-14081-5.00154-9

8. Ferrara A., Incremona G.P. Nonlinear sliding mode control. In: Zhengtao Ding, ed. *Encyclopedia of Systems and Control Engineering*. Elsevier. 2026. Pp. 100–111. DOI: 10.1016/B978-0-443-14081-5.00146-X
9. Cissé A., Boutayeb M. On state feedback control of a class of nonlinear PDE systems in finite dimension. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. Vol. 130. 2024. P. 107751. DOI: 10.1016/j.cnsns.2023.107751
10. Grechkin N.L., Vataeva E.Yu. About modeling hysteresis characteristics in problems of nonlinear control system synthesis. *Engineering Journal of Don*. 2026. No. 1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2026/10677 (open access). (In Russian)
11. Nikitin A.V., Shishlakov V.F. *Parametricheskii sintez nelineynykh sistem avtomaticheskogo upravleniya* [Parametric synthesis of nonlinear automatic control systems]. St. Petersburg: SPbGUAP, 2003. 358 p. (In Russian)
12. Shishlakov V.F., Vataeva E.Yu., Grechkin N.L., Shishlakov D.V. Application of polynomial approximation in solving problems of synthesis of nonlinear ACS. *Sensors & Systems*. 2023. No. 4-2(270). Pp. 10–12. DOI: 10.25728/datsys.2023.4.2.2. (In Russian)
13. Shishlakov V.F., Vataeva E.Yu., Grechkin N.L., Shishlakov D.V. Parametric synthesis of a potentiometric low-power tracking system. *Sensors & Systems*. 2023. No. 4-1(269). Pp. 5–9. DOI: 10.25728/datsys.2023.4.1.1. (In Russian)
14. Grechkin N.L., Vataeva E.Yu., Shishlakov V.F. Algorithm for calculating nonlinearity the switching points “two-position relay with hysteresis”. *Radioengineering*. 2024. Vol. 88. No. 8. Pp. 24–34. DOI: 10.18127/j00338486-202408-03. (In Russian)
15. Grechkin N.L. Parametric synthesis of automatic control systems with ambiguous characteristics. *Engineering Journal of Don*. 2026. No. 1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2026/10678 (open access). (In Russian)

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflict of interest.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № FSRF-2023-0003, «Фундаментальные основы построения помехозащищенных систем космической и спутниковой связи, относительной навигации, технического зрения и аэрокосмического мониторинга».

Funding. The paper was prepared with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under grant agreement No. FSRF-2023-0003, “Fundamental principles of the construction of noise-immune systems for space and satellite communications, relative navigation, technical vision, and aerospace monitoring”.

Информация об авторах

Гречкин Никита Леонидович, ст. преподаватель кафедры управления в технических системах, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения; 190000, Россия, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 67, лит. А; space.suai@bk.ru, ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-8477-0752>, SPIN-код: 7170-8166

Ватаева Елизавета Юрьевна, канд. техн. наук, доцент кафедры управления в технических системах, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения; 190000, Россия, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 67, лит. А; elizavetavataeva@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7007-4967>, SPIN-код: 2234-6792

Information about the authors

Nikita L. Grechkin, Senior Lecturer, Department of Control in Technical Systems, Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation;

67, Lit. A, Bolshaya Morskaya street, Saint Petersburg, 190000, Russia;

space.suai@bk.ru, ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-8477-0752>, SPIN-code: 7170-8166

Elizaveta Yu. Vataeva, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Control in Technical Systems, Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation;

67, Lit. A, Bolshaya Morskaia street, Saint Petersburg, 190000, Russia;

elizavetavataeva@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7007-4967>, SPIN-code: 2234-6792