

УДК 519.7

Научная статья

DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-6-109-116

EDN: JCQKPI

Робастная модификация PSO на основе М-средних для решения задач линейной регрессии

Е. М. Казакова

Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук
360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

Аннотация. Линейная регрессия остается одним из базовых инструментов анализа данных, однако ее устойчивость резко снижается в присутствии выбросов и шумов, что приводит к искажению коэффициентов и снижению качества прогноза. Классические эвристические алгоритмы оптимизации, такие как Particle Swarm Optimization (PSO) и Jaya, показывают хорошие результаты на гладких функциях потерь, но оказываются чувствительными к выбросам при применении стандартной среднеквадратичной ошибки (MSE). Это создает потребность в разработке простых, но робастных модификаций, которые сохраняли бы глобальные поисковые свойства, не усложняя структуру базового алгоритма.

Цель исследования. Разработать и экспериментально оценить робастную модификацию PSO (PSO-Robust), обеспечивающую устойчивость линейной регрессии к выбросам без усложнения основного алгоритма и без введения дополнительных гиперпараметров.

Методы исследования. Алгоритмическая идея: сохранить стандартные уравнения движения PSO; вмешательство только в функцию пригодности. Вместо среднеквадратичной функции потерь используются М-средние на базе функции Хьюбера с адаптивными весами, уменьшающими вклад выбросов. Вычислительные эксперименты на синтетических данных (15 % и 25 % выбросов) выполнены при одинаковых гиперпараметрах для всех сравниваемых алгоритмов и 30 независимых перезапусках. Оценка по средним и медианным тестовым ошибкам, а также по разбросу (дисперсия, межквартильный размах). Визуальный анализ – *boxplot* распределений ошибок и линии регрессии.

Результаты. PSO-Robust устойчиво превосходит классический PSO и Jaya по средним и медианным тестовым ошибкам. Наблюдается меньший разброс результатов (дисперсия). Визуальный анализ подтверждает сниженную чувствительность к выбросам (более компактные *boxplot*, более адекватные регрессионные линии).

Заключение. Модификация PSO-Robust демонстрирует стабильное превосходство над исходными алгоритмами по точности и устойчивости, обеспечивая более компактные *boxplot* и менее искаженные регрессионные линии. Предложенный подход сочетает простоту реализации с робастностью, повышая надежность регрессионных моделей в условиях неоднородных данных. Перспективы развития включают расширение метода на многомерные и нелинейные модели, а также исследование альтернативных робастных функций потерь.

Ключевые слова: эвристические алгоритмы, Particle Swarm Optimization (PSO), Jaya, выбросы, робастность, линейная регрессия, М-средние, функция Хьюбера, оптимизация

Поступила 14.10.2025, одобрена после рецензирования 01.11.2025, принята к публикации 17.11.2025

Для цитирования. Казакова Е. М. Робастная модификация PSO на основе М-средних для решения задач линейной регрессии // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2025. Т. 27. № 6. С. 109–116. DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-6-109-116

Robust modification of PSO algorithm based on M-means for solving linear regression

E.M. Kazakova

Institute of Applied Mathematics and Automation –
branch of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
89 A, Shortanov street, Nalchik, 360000, Russia

Abstract. Linear regression is a fundamental data analysis tool, but it can be greatly affected by outliers and noise, which can lead to distorted coefficients and a reduction in forecast quality. Classical heuristic PSO (Particle Swarm Optimization) and Jaya algorithms demonstrate good performance on smooth loss functions, but they are sensitive to outliers when applying the standard mean squared error (MSE). This creates a need for simple but effective modifications that would maintain global search capabilities without complicating the basic algorithm's structure.

Aim. The study is to develop and subject to experimental evaluation modification of PSO algorithm (PSO-Robust) that ensures the robustness of linear regression to outliers without complicating the core algorithm or introducing additional hyperparameters.

Methods. Algorithmic idea: to keep the standard PSO equations of motion; interfering only with the fitness function. Instead of the root mean square loss, an M-means function based on the Huber function is used, with adaptive weights that reduce the contribution of outliers. Experiments have been conducted on synthetic data with 15 % and 25 % outliers, with the same hyperparameters for all compared algorithms and 30 independent runs. Evaluation by mean and median test errors, as well as by dispersion estimation (variance, interquartile range). Visual analysis – boxplot of error distributions and regression lines. Evaluation by mean and median test errors, as well as dispersion (variance, interquartile range). Visual analysis – boxplot of error distributions and regression lines.

Results. PSO-Robust consistently outperforms classic PSO and Jaya in terms of mean and median test errors. The results show a smaller spread (variance). The visual analysis confirms reduced sensitivity to outliers (more compact box plots, more consistent regression lines).

Conclusion. The PSO-Robust modification demonstrates consistent superiority over the original algorithms in accuracy and robustness, producing more compact boxplots and less distorted regression lines. The proposed approach combines simplicity of implementation and robustness, increasing the reliability of regression in the case with heterogeneous data. Future developments include extending the method to multivariate and nonlinear models, as well as exploring alternative robust loss functions.

Keywords: heuristic algorithms, Particle Swarm Optimization (PSO), Jaya, outliers, robustness, linear regression, M-means, Huber function, optimization

Submitted 14.10.2025,

approved after reviewing 01.11.2025,

accepted for publication 17.11.2025

For citation. Kazakova E.M. Robust modification of PSO algorithm based on M-means for solving linear regression. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS*. 2025. Vol. 27. No. 6. Pp. 109–116. DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-6-109-116

ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия задача глобальной оптимизации стала ключевой в различных областях науки и техники – от машиностроения и биоинформатики до искусственного интеллекта и управления сложными системами. При этом многие практические задачи характеризуются высокой размерностью, нелинейностью, неявностью градиентов и наличием большого количества локальных минимумов. Такие условия делают градиентные методы малоприменимыми и стимулируют развитие метаэвристических подходов, способных эффективно исследовать сложные поисковые пространства.

Метаэвристический алгоритм представляет собой приближенный метод решения задач, основанный на эмпирических правилах, интуиции или наблюдении за естественными процессами, без строгих математических гарантий нахождения глобального оптимума. Основной целью таких алгоритмов является нахождение достаточно хорошего решения за разумное время, особенно в условиях ограниченных вычислительных ресурсов.

Одним из широко применяемых метаэвристических методов является алгоритм роя частиц (Particle Swarm Optimization, PSO), предложенный Кеннеди и Эберхартом в 1995 году [1]. Он имитирует коллективное поведение особей (частиц), каждая из которых адаптирует свою траекторию движения, ориентируясь как на личный, так и на глобальный опыт. Простота реализации, гибкость и способность быстро находить приемлемые решения сделали PSO популярным инструментом в решении непрерывных и дискретных задач оптимизации. Наряду с ним активно развивается и алгоритм Жауа, предложенный Рао [2], основным принципом которого является стремление к наилучшему решению и уход от наихудшего, без использования дополнительных параметров управления.

Метод М-средних представляет собой класс методов в робастной статистике, предназначенных для минимизации влияния выбросов на оценки параметров модели. В отличие от классических методов (например, метода наименьших квадратов, МНК), М-средние заменяют квадратичную функцию потерь на робастную функцию ρ , которая менее чувствительна к большим отклонениям (например, функция Хьюбера, Тьюки и т.д.) [3, 4].

Несмотря на широкую распространенность PSO алгоритм страдает рядом ограничений, включая преждевременную сходимость, зависимость от начальных условий, неустойчивость на многомодальных функциях и отсутствие адаптивного механизма, позволяющего учитывать «важность» или «вклад» каждой отдельной особи в общую поисковую стратегию. В литературе представлены многочисленные модификации, направленные на повышение эффективности PSO [5–9].

Одним из направлений, которое до сих пор остается недостаточно исследованным, является взвешивание вклада каждой частицы или агента в процессе эволюции решения. В классическом PSO каждая частица имеет равный вес при выборе лучшего решения. Однако стандартный PSO чувствителен к выбросам и шуму в данных, поскольку использует простое среднее арифметическое ошибок, что может искажать оценку фитнес-функции и приводить к неустойчивым решениям. Для повышения робастности предлагается модификация, интегрирующая принципы робастной статистики, в частности, М-средние. Робастная версия PSO заменяет стандартную фитнес-функцию на взвешенную оценку, где веса адаптивно уменьшают влияние выбросов, основываясь на распределении остатков ошибок.

Алгоритм роя частиц (PSO)

Алгоритм PSO решает задачу оптимизации

$$\min_{x \in \mathbb{R}^D} f(x),$$

используя роевую динамику. Пусть N – размер роя. На каждой итерации $t = 0, 1, 2, \dots$ состояние частицы $i \in \{1, \dots, N\}$ задается вектором положения $x_i^t \in \mathbb{R}^D$ и скоростью $v_i^t \in \mathbb{R}^D$. Для каждой частицы вычисляются локально лучшее найденное положение

$$p_i^t \in \underset{\tau \leq t}{\operatorname{argmin}} f(x_i^\tau),$$

и глобально лучшее положение роя

$$g^t \in \underset{\substack{1 \leq k \leq N \\ \tau \leq t}}{\operatorname{argmin}} f(x_k^\tau).$$

Инициализация: выбираются x_i^0 (например, случайно в заданной области поиска), скорости полагаются $v_i^0 = 0$ (или малыми случайными), вычисляются $f(x_i^0)$, после чего формируются $p_i^0 = x_i^0$ и $g^0 \in \{x_1^0, \dots, x_N^0\}$ как текущие минимизаторы.

Обновление на шаге $t \rightarrow t+1$ задается рекуррентными соотношениями

$$v_i^{t+1} = \omega v_i^t + c_1 r_{1,i}^{t+1} \odot (p_i^t - x_i^t) + c_2 r_{2,i}^{t+1} \odot (g^t - x_i^t)$$

$$x_i^{t+1} = x_i^t + v_i^{t+1},$$

где $\omega \geq 0$ – инерционный вес, $c_1, c_2 \geq 0$ – когнитивный и социальный коэффициенты соответственно, \odot обозначает покомпонентное умножение, а векторы $r_{1,i}^{t+1}, r_{2,i}^{t+1} \in [0, 1]^D$ состоят из независимых, равномерно распределенных случайных компонент (можно также использовать скаляры $r_{1,i}^{t+1}, r_{2,i}^{t+1} \sim \mathcal{U}[0, 1]$ для всех координат).

Алгоритм Jaya

Алгоритм Jaya является простым методом популяционной оптимизации. Обновление решения определяется как движение в сторону лучшего кандидата и одновременно – от худшего:

$$x_j(t+1) = x_j(t) + r_1(best - |x_j(t)|) + r_2(worst - |x_j(t)|),$$

где $best, worst$ – соответственно лучшие и худшие решения текущей популяции, r_1, r_2 – случайные числа.

Робастный алгоритм PSO

В контексте задач оптимизации, таких как линейная регрессия с шумными данными, стандартный PSO использует функцию стоимости на основе среднего значения потерь по набору данных $\mathcal{D} = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$:

$$f(\mathbf{x}_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L(y_i - \hat{y}_{ij}),$$

где $\hat{y}_{ij} = a_j x_i + b_j$ (для $D = 2$, $\mathbf{x}_j = (a_j, b_j)$), а $L(\cdot)$ – функция потерь (например, функция Хьюбера [10]):

$$L(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} r^2, & |r| \leq \delta, \\ \delta(|r| - \frac{1}{2}\delta), & |r| > \delta, \end{cases} \quad (1)$$

с параметром $\delta > 0$. Однако в присутствии выбросов в данных среднее значение функции потерь чувствительно к аномалиям, что может привести к неустойчивости оптимизации.

Для повышения робастности предлагается модификация PSO, основанная на принципах М-средних в робастной статистике. Вместо обычного среднего функция стоимости вычисляется как взвешенное среднее потерь, где веса адаптивно снижают влияние выбросов. Для каждой частицы j на итерации t :

1. Вычисляются невязки $r_{ij} = y_i - \hat{y}_{ij}$ для всех $i = 1, \dots, n$.

2. Оценивается робастное положение u_j для распределения остатков $\{r_{ij}\}_{i=1}^n$ как решение задачи минимизации:

$$u_j = \operatorname{argmin}_u \sum_{i=1}^n \rho(r_{ij} - u),$$

где $\rho(r) = \sqrt{\varepsilon^2 + r^2} - \varepsilon$ – гладкая аппроксимация модуля с малым $\varepsilon > 0$ для численной устойчивости. Это соответствует робастной оценке, близкой к медиане, устойчивой к выбросам (в отличие от среднего).

Решение u^* находится итеративно с помощью градиентного спуска:

$$u_j^{k+1} = u_j^k - \eta \sum_{i=1}^n \psi(r_{ij} - u_j^k),$$

где $\psi(r) = \frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{r}{\sqrt{\varepsilon^2 + r^2}}$, $\eta = 0.001$ – шаг обучения, n – количество итераций.

3. Вычисляются нормализованные веса w_{ij} для каждого остатка на основе второй производной $\psi'(r)$:

$$\psi'(r) = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2 + r^2)^{3/2}},$$

$$w_{ij} = \frac{\psi'(r_{ij} - u^*)}{\sum_{k=1}^n \psi'(r_{kj} - u^*)}.$$

Веса w_{ij} близки к $1/n$ для типичных невязок (малых $|r_{ij} - u^*|$) и уменьшаются до нуля для выбросов (больших $|r_{ij} - u^*|$), обеспечивая низкие веса для выбросов. Условие нормировки $\sum_i w_{ij} = 1$ выполняется автоматически.

4. Робастная функция стоимости для частицы j :

$$\tilde{f}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_{ij} L(r_{ij}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_{ij} L(y_i - \hat{y}_{ij}).$$

Аналогично вычисляются \tilde{f}_j^p для локального лучшего положения p_j^* . Обновление локального лучшего: если $\tilde{f}_j < \tilde{f}_j^p$, то $p_j \leftarrow x_j$. Глобальное лучшее g выбирается как p_j^* с минимальным \tilde{f}_j^p среди всех j .

Такая модификация интегрирует робастность на уровне оценки функции стоимости, делая PSO устойчивым к шумам и выбросам в данных, без изменения динамики обновления скоростей и позиций. Это особенно полезно для задач регрессии, где набор данных может содержать выбросы, и сочетает глобальный поиск PSO с локальной робастностью М-средних. Процесс повторяется до сходимости или фиксированного числа итераций.

Вычислительные эксперименты

Для иллюстрации робастности алгоритмов была использована задача линейной регрессии, содержащая выбросы.

В эксперименте использовались искусственно сгенерированные наборы данных для задачи регрессии (№ 1, № 2). Данные состоят из пар (X, Y) , где: X – независимая переменная (скалярный входной признак); Y – зависимая переменная. В наборах данных присутствуют выбросы с различными распределениями: в задаче № 1 – 15 % выбросов; № 2 – 25 % выбросов.

Тренировочный набор отображен синими точками на рисунке 1. Он используется для подбора параметров моделей. Тестовый набор отображен оранжевыми точками и применяется для оценки качества работы моделей.

Для всех алгоритмов использовались одинаковые гиперпараметры: размер роя – 10 частиц, число итераций – 150, число независимых запусков – 30, параметры PSO: $\alpha = 0,9$, $\beta = 1,5$, $\gamma = 0,25$. В качестве функции потерь используется функция Хьюбера (1).

Сравнение эффективности работы алгоритмов проводилось на тестовом наборе данных по следующим метрикам: среднее значение ошибок по 30 независимым запускам, стандартное отклонение значений (устойчивость алгоритма), минимальное значение функции ошибок. В таблице 1 представлены полученные значения метрик на тестовом наборе данных.

Таблица 1. Метрики на тестовом наборе данных / **Table 1.** Metrics on the test dataset

Алгоритм	Набор данных №	Среднее	Медиана	Дисперсия	Минимум
PSO	1	1,9355	1,7133	1,2986	0,0023
	2	9,266	8,9395	6,0042	0,5504
PSO_Robust	1	0,7899	0,5752	0,6891	0,0134
	2	2,8898	2,0534	2,4763	0,0168
Jaya	1	1,9353	1,7131	1,2986	0,002
	2	9,2654	8,9385	6,0042	0,5517

Как видно из таблицы, наименьшее среднее значение ошибки на обоих наборах данных у PSO-Robust, что говорит о том, что в среднем этот метод решал задачу лучше остальных. PSO и Jaya показывают практически одинаковую более высокую среднюю ошибку.

Медиана у PSO-Robust тоже существенно ниже, чем у двух других алгоритмов, что подтверждает его преимущество в большинстве запусков. Алгоритм PSO-Robust имеет меньший разброс значений ошибки по сравнению с PSO и Jaya, следовательно, он дает более стабильные результаты.

На рисунке 1 прогноз модели с PSO (синяя линия) проходит примерно посередине обоих кластеров, не выявляя линейную зависимость точек без выбросов. Дает высокие ошибки на тестовом наборе (подтверждается высокими средними ошибками из табл. 1). Прогнозная модель с Jaya (зеленая линия) почти совпадает с линией PSO и тоже не отражает зависимость данных.

PSO-Robust явно лучше подстраивается под тестовые данные и улавливает тенденцию в кластере с тестовыми точками, что подтверждается его более низкой медианой и средней ошибкой. PSO и особенно Jaya не смогли адекватно учесть структуру данных, что привело к высоким ошибкам.

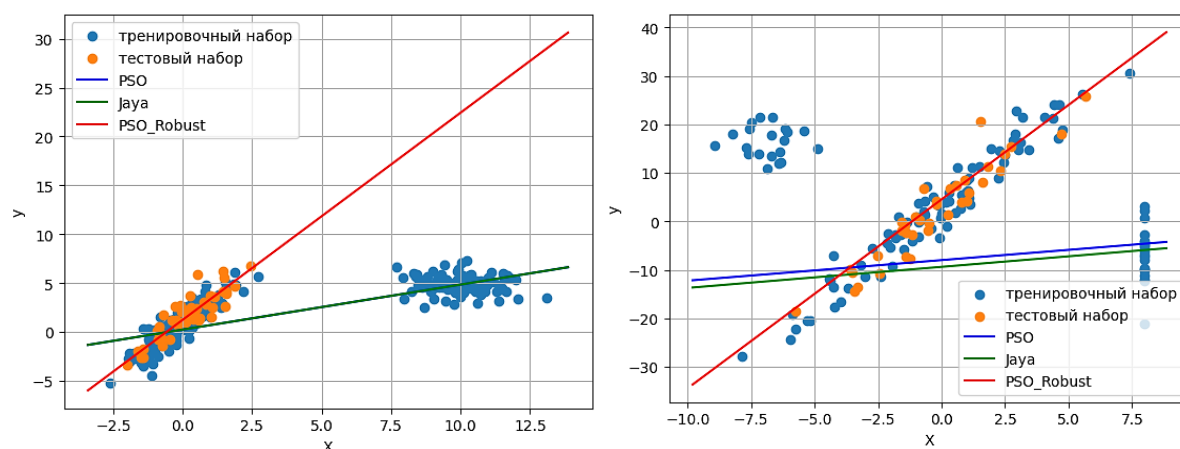


Рис. 1. Примеры восстановления линейной регрессии алгоритмами PSO, Jaya, PSO-Robust

Fig. 1. Examples of linear regression recovery using PSO, Jaya, and PSO-Robust algorithms

На рисунке 2 изображены графики *boxplot* распределения ошибок на тестовых наборах данных для каждого алгоритма: Ось Y – ошибка на тестовых данных; Ось X – алгоритмы. Оранжевая линия в каждом боксе – медиана распределения ошибок. Концы «усов» показывают диапазон значений (без выбросов), кружки – выбросы.

PSO-Robust имеет медиану ошибки ниже и бокс расположен ниже на графике – алгоритм в целом дает меньшие ошибки. У PSO и Jaya медианы практически совпадают и лежат выше – результаты хуже. Диапазон (высота бокса и длина «усов») у PSO-Robust меньше – он работает стабильнее, тогда как PSO и Jaya показывают более изменчивое качество.

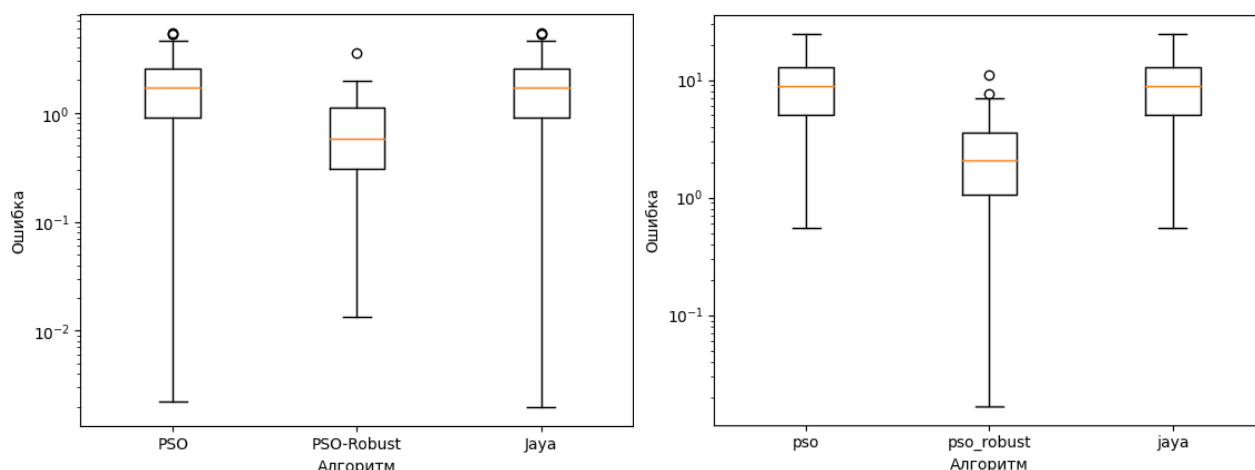


Рис. 2. Распределение значений ошибок после 30 независимых запусков

Fig. 2. Distribution of error values after 30 independent runs

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты экспериментов показали, что выбор оптимизационного алгоритма существенно влияет на качество регрессионной модели при работе с данными с выбросами. Среди протестированных методов наилучшие результаты продемонстрировал алгоритм PSO-Robust, обеспечивший наименьшие значения средней и медианной ошибки на тестовом наборе, а также более стабильное поведение (меньшее стандартное отклонение) по сравнению с классическим PSO и алгоритмом Jaya.

Анализ графиков *boxplot* распределения ошибок подтвердил устойчивость PSO-Robust и его способность точнее описывать зависимость в области тестовых данных. Графический анализ регрессионных зависимостей показал, что PSO и Jaya неадекватно аппроксимируют кластер с тестовыми наблюдениями, тогда как PSO-Robust лучше отражает локальную структуру данных.

Таким образом, применение робастного варианта PSO позволяет повысить точность и надежность построения регрессионных моделей в задачах с неоднородным распределением данных. Но есть ограничения, связанные с фокусом на линейной регрессии и синтетических наборах; дальнейшие исследования включают расширение на многомерные и нелинейные модели, альтернативные робастные функции потерь и автонастройку параметров робастности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Kennedy J., Eberhart R. Particle swarm optimization. *Proc. IEEE Int. Conf. on Neural Networks (ICNN)*. 1995. Pp. 1942–1948. DOI: 10.1109/ICNN.1995.488968
2. Rao R. Jaya: A simple and new optimization algorithm for solving constrained and unconstrained optimization problems. *Int. J. Indus. Eng. Comput.* 2016. Vol. 1. No. 7. Pp. 19–34. DOI: 10.5267/j.ijiec.2015.8.004

3. Shibzukhov Z.M. On a robust gradient boosting scheme based on aggregation functions insensitive to outliers. *Automation and Remote Control*. 2022. Vol. 83. No. 10. Pp. 1619–1629. DOI: 10.1134/S00051179220100149

4. Шибзухов З. М., Димитриченко Д. П., Казаков М. А. Принцип минимизации эмпирического риска на основе агрегирующих функций средних потерь для решения задач регрессии // Программные продукты и системы. 2017. Т. 30. № 2. С. 180–186. DOI: 10.15827/0236-235X.030.2.180-186

Shibzukhov Z.M., Dimitrichenko D.P., Kazakov M.A. The principle of minimizing empirical risk based on aggregating average loss functions for solving regression problems. *Programmnye produkty i sistemy* [Software Products & Systems]. 2017. Vol. 30. No. 2. Pp. 180–186. DOI: 10.15827/0236-235X.030.2.180-186. (In Russian)

5. Zeng J., Yu X., Yang G., Gui H. Dynamic robust particle swarm optimization algorithm based on hybrid strategy. *International Journal of Swarm Intelligence Research (IJSIR)*. 2023. Vol. 14. No. 1. Pp. 1–14. DOI: 10.4018/IJSIR.325006

6. Garg H. A hybrid PSO–GA algorithm for constrained optimization problems. *Applied Mathematics and Computation*. 2016. Vol. 274. Pp. 292–305. DOI: 10.1016/j.amc.2015.11.001

7. Şenel F.A., Gökçe F., Yüksel A.S., Yigit T. A novel hybrid PSO–GWO algorithm for optimization problems. *Engineering with Computers*. 2019. Vol. 35. Pp. 1359–1373. DOI: 10.1007/s00366-018-0668-5

8. Kang H., Li X., Shen Yo. et al. Particle swarm optimization with historical return decay enhances cooperation in public goods games with investment risks. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2024. Vol. 189. P. 115665. DOI: 10.1016/j.chaos.2024.115665

9. Казакова Е. М. Гибридный алгоритм PSO–Яаа для решения различных оптимизационных задач // Программная инженерия. 2024. Т. 15. № 2. С. 87–96. DOI: 10.17587/prin.15.87-96

Kazakova E.M. A hybrid PSO–Jaya algorithm for solving various optimization problems. *Programmnaya inzheneriya* [Software Engineering]. 2024. Vol. 15. No. 2. Pp. 87–96. DOI: 10.17587/prin.15.87-96. (In Russian)

10. Huber P.J. Robust Statistics: monograph. New York: Wiley, 1981. 308 p. ISBN: 0-471-41805-6

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Института прикладной математики и автоматизации – филиала Кабардино-Балкарского научного центра РАН (тема № 125031904190-5).

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment of the Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (No. 125031904190-5).

Информация об авторе

Казакова Елена Мусовна, мл. науч. сотр. отдела нейроинформатики и машинного обучения, Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук;

360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А;

shogenovae@inbox.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5819-9396>, SPIN-код: 4135-3315

Information about the author

Elena M. Kazakova, Junior Researcher, Department of Neuroinformatics and Machine Learning, Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences;

89 A, Shortanov street, Nalchik, 360000, Russia;

shogenovae@inbox.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5819-9396>, SPIN-code: 4135-3315