

Обратная задача по идентификации значений функции переменного порядка дробной производной в математической модели аномальных вариаций объемной активности радона

Д. А. Твёрдый[✉], Р. И. Паровик

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн
Дальневосточного отделения Российской академии наук
684034, Россия, с. Паратунка, ул. Мирная, 7

Аннотация. Проблема сейсмичности в Камчатском крае обуславливает важность фундаментальных исследований, способствующих пониманию процессов, происходящих в земной коре. Аномальные изменения концентрации радиоактивного газа радона (^{222}Rn) считаются одним из краткосрочных предвестников землетрясений. Мониторинг представляет собой сбор информации по объемной активности ^{222}Rn (OAP) в накопительной камере регистратора со временем и выявление аномалий. Однако механизмы возникновения таких аномалий малоизучены. Поэтому авторами ранее были предложены новые математические эредитарные модели OAP, с учетом нелокальности по времени процесса переноса в неоднородной фрактальной геосреде, для описания необычной миграционной способности ^{222}Rn . Основной параметр моделей – переменный порядок дробной производной типа Герасимова–Капуто, связанный с интенсивностью процесса переноса ^{222}Rn при изменении проницаемости геосреды.

Цель исследования – решение коэффициентной обратной задачи идентификации значений в математической эредитарной модели аномальных вариаций OAP.

Методы исследования. Используются методы математического моделирования процессов, протекающих в геологической среде, и решение коэффициентных обратных задач для таких моделей с помощью алгоритма на основе метода Левенберга–Марквардта (IP-LM).

Результаты. Получен ряд результатов решения обратной задачи при различных параметрах, управляющих ходом IP-LM. Результаты разделяются на 2 типа: неправдоподобные – из-за выхода из области допустимых значений и начального приближения идентифицируемых значений, близких к ориентиру, вручную подобранным значениям; правдоподобные – из-за начального приближения, близкого к 0, хорошего согласия результатов с данными OAP, где сохраняет рост значений от 0 к 1 при потере явной периодичности ориентира.

Выводы. Из результатов можно сделать вывод о возможности решения сформулированной двухпараметрической обратной задачи на основе экспериментальных данных OAP. Получаемые результаты правдоподобны, однако результат решения обратной задачи зависит от начального приближения идентифицируемых значений.

Ключевые слова: математическое моделирование, объемная активность радона, дробная производная переменного порядка, обратные задачи

Поступила 27.10.2025, одобрена после рецензирования 07.11.2025, принята к публикации 28.11.2025

Для цитирования. Твёрдый Д. А., Паровик Р. И. Обратная задача по идентификации значений функции переменного порядка дробной производной в математической модели аномальных вариаций объемной активности радона // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2025. Т. 27. № 6. С. 77–88. DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-6-77-88

Inverse problem on determining variable-order fractional derivative in mathematical model of anomalous variations in radon volumetric activity

D.A. Tverdyi[✉], R.I. Parovik

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation
Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences
7, Mirnaya street, Paratunka village, 684034, Russia

Abstract. The seismicity issue in the Kamchatka region highlights the importance of fundamental research to understand the processes occurring in the Earth's crust. Anomalous changes in the concentration of radioactive radon gas (^{222}Rn) have been observed to be precursor to earthquakes. Monitoring involves collecting data on the volume activity of ^{222}Rn in the recording chamber over time and detecting any unusual patterns or anomalies. However, the mechanisms behind these irregularities are still not well understood. Therefore, the authors have previously proposed new mathematical hereditary VAR models to describe the unusual migration capacity of ^{222}Rn , taking into account the time-dependent transport process in a heterogeneous fractal geoenvironment. The key parameter of the models is the variable order of the Gerasimov-Caputo fractional derivative, related to the intensity of the ^{222}Rn transport process with changes in the permeability of the geoenvironment.

Aim. The study is to solve the coefficient inverse problem of identifying values in the mathematical hereditary model of anomalous variations of the OAR.

Research methods. Methods of mathematical modeling of processes occurring in the geological environment are used, as well as solving coefficient inverse problems for these models using an algorithm based on the Levenberg-Marquardt method (IP-LM).

Results. A series of results are obtained for solving the inverse problem with various parameters controlling the IP-LM motion. The results are divided into two types: implausible – due to going beyond the range of acceptable values and the initial approximation of identified values close to the reference point, similar to manually selected values; plausible – due to the initial approximation close to 0, good agreement between the results and the OAR data, where the increase in values from 0 to 1 is maintained despite the loss of the reference point's apparent periodicity.

Conclusions. The results suggest that it is possible to solve the formulated two-parameter inverse problem based on the experimental data of the OAR. The obtained results are plausible; however, the outcome of the inverse problem solution depends on the initial approximation of the identified values.

Keywords: mathematical modeling, radon volumetric activity, fractional derivative of variable order, inverse problems

Submitted 27.10.2025,

approved after reviewing 07.11.2025,

accepted for publication 28.11.2025

For citation. Tverdyi D.A., Parovik R.I. Inverse problem on determining variable-order fractional derivative in mathematical model of anomalous variations in radon volumetric activity. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS*. 2025. Vol. 27. No. 6. Pp. 77–88. DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-6-77-88

ВВЕДЕНИЕ

Полуостров Камчатка расположен в одном из наиболее сейсмоопасных районов Земли, а сильные сейсмические события способны нанести огромный ущерб. Проблема сейсмичности в Камчатском крае и прилежащих землях обуславливает важность фундаментальных исследований, которые могут расширить наше понимание процессов, происходящих в земной коре, при подготовке будущего очага землетрясения. Одним из таких актуальных направлений является применение экспериментальных данных мониторинга подпочвен-

ных газов в сопоставлении со сведениями о сейсмичности, в совокупности с исследованиями процессов миграции подпочвенных газов с помощью методов математического моделирования с целью выделения из данных и интерпретации аномалий как возможных предвестников землетрясений.

В целях поиска предвестниковых сигналов в данных мониторинга концентраций подпочвенных газов на полуострове Камчатка развернута сеть пунктов наблюдения, существующая более 20 лет [1]. В данном исследовании интерес представляет ^{222}Rn – инертный радиоактивный газ с периодом полураспада около 3.85 суток, который постоянно выделяется из земной коры, что позволяет вести его непрерывную регистрацию. Газ ^{222}Rn считается известным и хорошо себя зарекомендовавшим индикатором процессов, протекающих в геологической среде [2, 3], особенно как краткосрочный предвестник землетрясений, а его исследование ведется во многих странах, расположенных в сейсмоактивных районах мира. Концентрацию ^{222}Rn характеризует такая величина, как объемная активность радона (ОАР) в накопительной камере, измеряемая в $\text{Бк}/\text{м}^3$ и вычисляемая на основе числа зарегистрированных датчиками β -излучения импульсов за минуту.

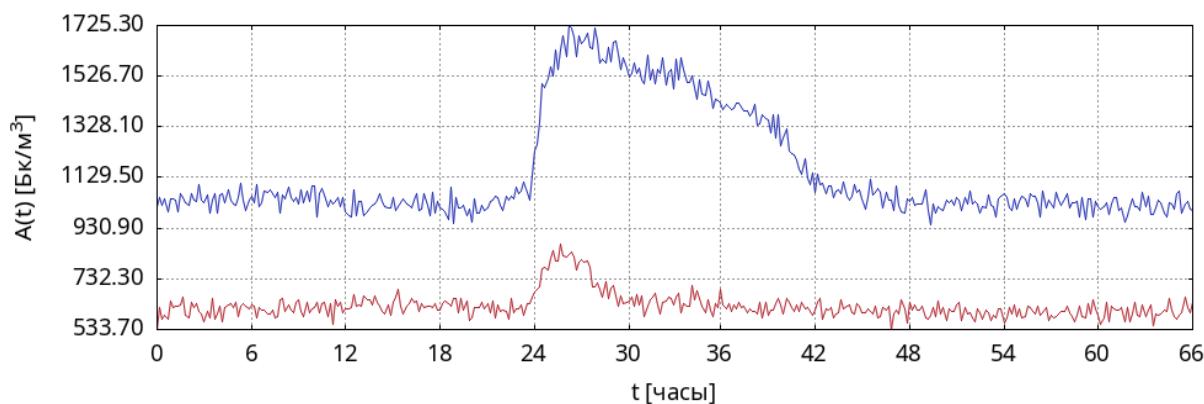


Рис. 1. Данные ОАР (аномальный выброс) с пункта наблюдения МРЗР (на базе скважины «Морозная-1», Елизовский район, Камчатка) 19.04.2021 05:43 – 21.04.2021 23:43 с частотой дискретизации 1/6 ч: (синий) – камера 1 на глубине 0.2 м; (красный) – камера 2 на глубине 1 м

Fig. 1. Data of RVA (anomalous emission) from the MRZR observation point (based on the Moroznaya-1 borehole, Yelizovsky District, Kamchatka) from 19.04.2021 05:43 to 21.04.2021 23:43 with a sampling frequency of 1/6 h: (blue) – camera 1 at a depth of 0.2 m; (red) – camera 2 at a depth of 1 m

Радоновые аномалии (аномальные вариации ОАР), как на рис. 1, могут служить предвестниками сигналами подготовки сильных землетрясений. Стоит отметить, что в работах [2, 4, 5] и многих других, связанных с изучением предвестниковых аномалий, собрана и систематизирована информация о радоновых предвестниках, описаны методы анализа данных, исследуются физические модели возникновения землетрясений и их интерпретации. Однако процесс массопереноса ^{222}Rn по своей природе является нелокальным. Поэтому часто возникают случаи, когда радон обладает необычной миграционной способностью [6], и объяснить это с помощью только механизма диффузии, описываемой обычными производными, или механизма конвекции (адвекции) невозможно. Но если рассматривать геологическую среду как среду со сложной топологией, неоднородную и пористую, одним словом, фрактальную [7], то тогда процесс массопереноса ^{222}Rn можно рассматривать под углом аномальных процессов переноса [8].

Поэтому авторами в исследованиях [9, 10] предлагаются математические эредитарные модели ОАР, но с учетом нелокальности по времени, что приводит к эффекту наследственности [11] в динамике переноса ^{222}Rn [12]. Эредитарность – свойство системы или среды помнить некоторое время оказанное на нее воздействие. Эредитарность эквивалентна таким понятиям, как последействие, наследственность, остаточность, память и запаздывание, нелокальность. Математический аппарат моделей с учетом нелокальности опирается на дробное исчисление, теория которого изучена достаточно хорошо [13, 14]. Основной параметр эредитарных моделей ОАР – это $0 < \alpha(t) < 1$ – переменный порядок дробной производной типа Герасимова–Капуто [15, 16], входящей в модель, связанный с интенсивностью процесса переноса ^{222}Rn при изменении проницаемости геосреды. В свою очередь, изменение проницаемости связывается с изменением напряженно-деформированного состояния геосреды при подготовке очага землетрясения.

Одним из главных инструментов геофизических исследований является математическое моделирование процессов, протекающих в геологической среде. Но следующим по важности инструментом является постановка и решение коэффициентных обратных задач [17] для таких моделей на основе экспериментальных данных с целью идентификации модельных параметров, так как часто невозможно провести их прямые измерения [18]. Еще одним фактором в пользу обратных задач является то, что параметры математических моделей могут принимать довольно сложный вид, в том числе иметь функциональные зависимости. Уточнение оптимальных значений параметров модели с помощью решения обратных задач на основе экспериментальных данных ОАР может сильно упростить процесс моделирования по сравнению с эмпирическим подбором параметров. Поэтому авторами в ряде работ формулируются и решаются обратные задачи с целью идентификации значений разнообразных параметров в эредитарной α -модели ОАР с дробной производной Герасимова–Капуто постоянного порядка. В работе [19] впервые была применена эредитарная α -модель ОАР для оценки изменения плотности потока радона на основе решения обратной задачи при изменении напряженно-деформированного состояния среды до и после сильного землетрясения на Камчатке 17 августа 2024 г.

В работе [9] также рассматривается задача математического моделирования аномальной ОАР (как на рисунке 1) с помощью эредитарной $\alpha(t)$ -модели. Параметры, представляющие собой разнообразные функции, подобраны эмпирически на основе соображений о ходе процессов переноса, накопления ^{222}Rn в накопительной камере, а также влиянии атмосферного давления на процесс накопления. Однако уточнение оптимальных значений этих функций проводилось тоже вручную, посредством сопоставления решения с обработанными экспериментальными данными и по визуальным оценкам степени подобия по R^2 – коэффициенту детерминации и R – коэффициенту корреляции Пирсона. В работе [20] на тестовом примере рассмотрена теоретическая возможность восстановления значений функции $\alpha(t)$ в математической модели с дробной производной типа Герасимова–Капуто переменного порядка $0 < \alpha(t) < 1$. В качестве метода решения обратной задачи был предложен алгоритм на основе итерационного метода Левенберга–Марквардта [21].

Новизна данной статьи заключается в том, что рассматривается задача идентификации значений функции $\alpha(t)$ в математической эредитарной $\alpha(t)$ -модели [9] аномальных вариаций объемной активности радона с помощью ранее предложенного метода и реализующего его алгоритма [20].

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОАР С УЧЕТОМ ПЕРЕМЕННОЙ НАСЛЕДСТВЕННОСТИ

Рассмотрим эредитарную $\alpha(t)$ -модель ОАР из работы [9] для описания аномального импульса (всплеска) ОАР, что представляет собой задачу Коши вида

$$\partial_{0,t}^{\alpha(t)} \bar{A}(t) = -a(t) \bar{A}(t)^2 - b(t) \bar{A}(t) + c(t), \quad \bar{A}(t) = \frac{A(t)}{A_{\max}}, \quad \bar{A}(t_0) = \frac{A_0}{A_{\max}}, \quad (1)$$

где обозначим: $C^2(0, T) = \mathbb{A}$ – класс дважды непрерывно-дифференцируемых функций; $C(0, 1) = \mathbb{B}$ – класс непрерывно-дифференцируемых функций; $\bar{A}(t) \in \mathbb{A}$ – ОАР в безразмерном виде, отн. ед.; $A(t)$ – ОАР, A_{\max} – максимальное значение ОАР, наблюдаемое в данных; A_0 – ОАР в начальный момент времени, $\text{Бк}/\text{м}^3$; $0 < \alpha(t) < 1$, $\alpha(t) \in \mathbb{B}$ – функция, переменный порядок дробной производной, параметр, связанный с интенсивностью переноса ^{222}Rn и изменением проницаемости геосреды, отн. ед.; $t \in [t_0, T]$ – время рассматриваемого процесса; t_0 и $T > 0$ – начальный и конечный моменты времени соответственно, с; θ – некоторое характерное время процесса, с; $a(t)$ – функция, как и член, при котором она стоит, связанные выходом ^{222}Rn из камеры в окружающую атмосферу при разнице давлений: внутреннего (камеры) и атмосферного, например, при прохождении в окрестности пункта наблюдения циклона, отн. ед.; $b(t) = \lambda_0$ – коэффициент воздухообмена, с^{-1} ; $c(t)$ – функция, описывающая диффузионный механизм переноса ^{222}Rn в камеру [22], отн. ед.

Член модели (1) в левой части уравнения, описывающий задержку, связанную с нелокальностью по времени в процессе переноса ^{222}Rn через геологическую среду, согласно [9, 10] представляется оператором дробного дифференцирования типа Герасимова–Капуто переменного порядка (FD-VO) $0 < \alpha(t) < 1$ вида

$$\partial_{0,t}^{\alpha(t)} \bar{A}(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_0^t \frac{\dot{\bar{A}}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha(t)}}, \quad (2)$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Далее для сопоставления с результатами математического моделирования будут использоваться данные с пункта МРЗР, описывающие только сам всплеск ОАР (рис. 1, синяя кривая) на выделенном участке данных протяженностью $T = 22$. Будем рассматривать задачу (1) при значениях параметров:

$$\begin{aligned} T &= 22, \quad \bar{A} = 0, \quad \bar{A}_{\max} = 1, \quad \lambda_0 = 0.05, \quad \theta = 1, \quad b(t) = \lambda_0, \\ \alpha(t) &= 0.99 \left(1 - \left(\frac{(T-t)}{T} \cos \left(\frac{3\pi t}{T} \right)^2 \right) \right), \quad a(t) = -2\lambda_0 + 12\lambda_0 \left(2 \cos \left(\frac{\pi t}{T} \right)^2 + \cos \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{11} \right)^2 \right), \quad (3) \\ c(t) &= 12\lambda_0 \left(\frac{12(T-t)}{10T} \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right)^2 + \frac{(T-t)}{T} \sin \left(\frac{3\pi t}{T} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

ФОРМУЛИРОВКА ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ EFDS

Прямая задача представляет собой задачу Коши (1), состоящую в поиске $\bar{A}(t) \in \mathbb{A}$ при известных значениях $\alpha(t) \in \mathbb{B}$ и параметров (3).

Прямая задача будет решаться численно. С этой целью авторами в [23] предложено и изучено несколько численных схем. В данной работе воспользуемся нелокальной явной конечно-разностной схемой (EFDS). Шаг дискретизации возьмем $h=1/6$ аналогично

частоте дискредитации экспериментальных данных на рисунке 1. Независимо от схемы численное решение прямой задачи рассматривается в равномерной сеточной области $\hat{\Omega}$:

$$\begin{aligned} h = T / N &= 1 / 6, N = 132, \quad \hat{\Omega} = \{(t_i = ih) : 0 \leq i < N\}, \quad a(t) = a_i, c(t) = c_i, \\ \bar{A}(t) &= \bar{A}_i \in \mathbb{A}, \quad 0 < \bar{A}_i < 1, \quad \mathbb{A} \in \hat{\Omega}, \quad \alpha(t) = \alpha_i \in \mathbb{B}, \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad \mathbb{B} \in \hat{\Omega}, \end{aligned} \quad (4)$$

где N – число узлов равномерной вычислительной сетки, размер входных данных.

В силу того, что размер входных данных отдельной прямой задачи невелик ($N = 132$), для численного решения прямой задачи воспользуемся нелокальной явной конечно-разностной схемой (EFDS). С учетом аппроксимации оператора (2) из работы [23] и согласно методу Эйлера численная схема EFDS для решения уравнения из (1) на равномерной сетке (4) примет вид:

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= \frac{1}{D_0} \left((D_0(1 - w_1^0) + b_0) u_0 - a_0 \bar{A}_0^2 + c_0 \right), \\ \bar{A}_2 &= \frac{1}{D_1} \left((D_1(1 - w_1^1) + b_1) \bar{A}_1 + D_1 w_1^1 \bar{A}_0 - a_1 \bar{A}_1^2 + c_1 \right), \\ \bar{A}_{i+1} &= \frac{1}{D_i} \left[(D_i(1 - w_1^i) + b_i) \bar{A}_i + D_i w_1^i \bar{A}_{i-1} - D_i \sum_{j=2}^i w_j^i (\bar{A}_{i-j+1} - \bar{A}_{i-j}) - a_i \bar{A}_i^2 + b_i \bar{A}_i + c_i \right], \\ D_i &= \frac{h^{-\alpha_{i+1}}}{\Gamma(2 - \alpha_{i+1})}, \quad w_j^i = (j+1)^{1-\alpha_{i+1}} - j^{1-\alpha_{i+1}}, \quad w_1^i = \sum_{i=0}^{N-1} (2^{1-\alpha_{i+1}} - 1^{1-\alpha_{i+1}}), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\bar{A}_0 = C$ – известная константа, начальное условие задачи Коши.

Разностная прямая задача (5) состоит в том, чтобы в $\hat{\Omega}$ области (4) найти $\bar{A}_i \in \mathbb{A}$ при известных значениях сеточных аналогов функций из (3) и $\alpha_i \in \mathbb{B}$.

Программные реализации различных методов и алгоритмов численного решения прямых и обратных задач, в том числе EFDS, интегрированы в программный комплекс FEVO v1.0 [24] для GNU/Linux, разработанный для решения задач моделирования динамики ОАР в сопоставлении с экспериментальными данными.

ФОРМУЛИРОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ И МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ

Первое: пусть значения функции $\alpha(t) \in \mathbb{A}$ (или ее сеточного аналога $\alpha(t_i) \in \mathbb{A}$) неизвестны. Однако в качестве информации о решении разностной прямой задачи Коши (5) в области $\hat{\Omega}$ можно представлять экспериментальные данные:

$$\bar{A}(t) = \bar{\theta}(t), \quad \bar{A}(t_i) = \bar{\theta}(t_i), \quad \bar{A}_i = \bar{\theta}_i. \quad (6)$$

Второе: пусть $\alpha(t) \in \mathbb{B}$ – функция известного класса, и ее вид однозначно определяется некоторым набором параметров $\vec{X} = [X_0, \dots, X_{K-1}]$ согласно [25].

Третье: у нас имеется представление о том, какой характер имеет функция $\alpha(t) = \alpha(t, \vec{X})$.

Тогда обратная задача для задачи Коши (1) с параметрами $a(t), b(t), c(t)$ из (3) определяется как идентификация (восстановление, определение) оптимальных значений функции $\alpha(t) = \alpha(t, \vec{X}) \in \mathbb{B}$ на основе известных экспериментальных данных (6):

$$\partial_{0,t}^{\alpha(t, \vec{X})} \bar{A}(t) = -a(t)\bar{A}(t)^2 - b(t)\bar{A}(t) + c(t), \quad \alpha(t, \vec{X}) = 0.99 \left(1 - \left(\frac{X_0(T-t)}{T} \cos(X_1 t)^2 \right) \right), \quad (7)$$

$$\bar{A}(t) = \frac{A(t)}{A_{max}}, \quad \bar{A}(t_0) = \frac{A_0}{A_{max}}, \quad \bar{A}(t) = \bar{\theta}(t), \quad \bar{A}(t_0) = \bar{\theta}(t_0),$$

а решение обратной задачи (7) сводится к поиску значений этих параметров \vec{X} из множества векторов $\overrightarrow{\mathbb{X}}$ как пространства решений обратной задачи, где $\overrightarrow{\mathbb{X}} \subset \mathbb{R}^K$.

Тогда разностная обратная задача в области $\hat{\Omega}$ для (5) с сеточными аналогами параметров a_i, b_i, c_i из (3) определяется как идентификация на основе известных экспериментальных данных (6) оптимальных значений сеточной функции:

$$\alpha(i, \vec{X}) = 0.99 \left(1 - \left(\frac{X_0(T-ih)}{T} \cos(X_1 ih)^2 \right) \right), \quad \alpha(i, \vec{X}) \in \mathbb{B}. \quad (8)$$

Далее в терминах теории безусловной оптимизации согласно [26] решение разностной обратной задачи сводится к минимизации функционала невязки между вектором экспериментальных данных и вектором решения разностной прямой задачи, полученного относительно некоторого приближения \vec{X} в ходе решения обратной задачи.

Важной характеристикой численных методов оптимизации является скорость сходимости, характеризующая эффективность используемого метода для решения обратной задачи. В данной статье опустим теорию и подробности, связанные с методикой решения обратной задачи для уравнения с дробной производной переменного порядка. С ними можно ознакомиться в работах [19, 20, 24]. В работе [20] на тестовом примере рассмотрена теоретическая возможность восстановления значений и вида функции $\alpha(t)$ в математической модели с дробной производной типа Герасимова–Капуто переменного порядка $0 < \alpha(t) < 1$. В качестве метода решения обратной задачи был предложен алгоритм IP-LM на основе итерационного метода Левенберга–Марквардта [21].

Важно отметить следующее. Решение обратной задачи методом IP-LM сводится к тому, чтобы в ходе цикла, начиная с заданных параметров, управляющих ходом метода IP-LM, многократно вычисляя решение разностной прямой задачи (5) с учетом приближений \vec{X} , получаемых в ходе решения обратной задачи, вычислить оптимальные значения $\overrightarrow{\Delta X}$. Такими параметрами, управляющими ходом IP-LM, являются: $\vec{X}^{(0)}$ – начальное приближение для компонент \vec{X} ; $\overrightarrow{\delta X}$ – малые заданные приращения \vec{X} ; числа c и v – константы пересчета параметра регуляризации γ ; а также Σ – заданная точность решения как одно из условий выхода из цикла IP-LM. Параметр γ имеет ключевое значение для IP-LM и напрямую связан с шагом и направлением сходимости метода.

Иначе говоря, постановка и решение обратной задачи на параметры модели позволяет перейти от их перебора с целью нахождения оптимальных значений к подбору других параметров: $\vec{X}^{(0)}, \overrightarrow{\delta X}, c, v$, управляющих ходом метода IP-LM, которые уже не привязаны к физическому смыслу исходной задачи.

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ УТОЧНЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ

Далее на входе алгоритма решения обратной задачи и для сопоставления с результатами математического моделирования будут использоваться данные с пункта МРЗР из камеры 1, описывающие только сам всплеск ОАР (рис. 1, синий). Для этого выделяется участок

данных протяженностью $T = 22$. После проводится обработка данных: сглаживание SMA с окном в 2 значения; нормировка на максимум A_{max} .

Результаты, полученные в виде кривых 1–2 (рис. 2) и кривых 1–2 (рис. 3), нереалистичны по следующим причинам. Во-первых, $\bar{X}^{(0)}$, начальное приближение, было взято очень близко к эталонному \bar{X} решению прямой задачи (рис. 2, кривая 5) и (рис. 3, кривая 5). Во-вторых, на рисунке 3 (кривая 1) видно, что было получено $\alpha(i, \bar{X}) > 1$, что неверно, т. к. выходит за ограничение на параметр от 0 до 1, и тот факт, что решение (рис. 2, кривая 1) по численной схеме EFDS не развалилось, это удачное сочетание других параметров модели.

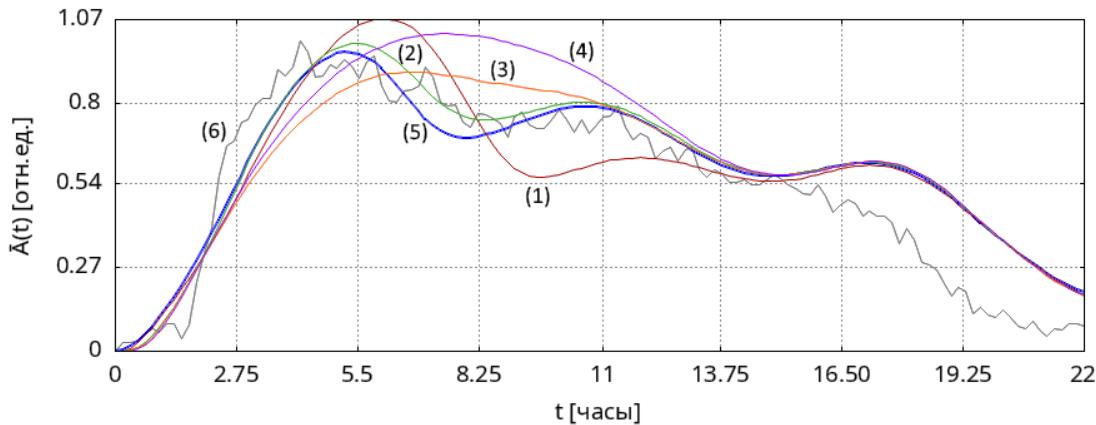


Рис. 2. Модельные кривые: (1–4) – на основе результатов решения обратной задачи при различных управляемых параметрах (см. таблицу 1); (5) – «эталонная» модельная кривая как решение прямой задачи при функции (8), подработанной вручную из [9], в сопоставлении с (6) – обработанными данными ОАР с пункта МРЗР

Fig. 2. Model curves: (1–4) – based on the results of solving the inverse problem for various control parameters (see Table 1); (5) – 'reference' model curve as the solution to the direct problem for the function (8), manually refined from [9], compared with (6) – processed RVA data from the MRZR point

Таблица 1. Список параметров, управляемых ходом алгоритма IP-LM в различных экспериментах (рис. 2), результаты решения обратных задач как вектор оптимальных значений \bar{X} и коэффициенты подобия с обработанными экспериментальными данными ОАР

Table 1. List of parameters used to control the IP-LM algorithm in different experiments (Fig. 2), the results of solving inverse problems as a vector of optimal values \bar{X} and similarity coefficients based on processed experimental RVA data.

	Кривая (1), красная	Кривая (2), зеленая	Кривая (3), оранжевая	Кривая (4), фиолетовая	«Эталонная» (5), синяя
$\bar{X}^{(0)}$	[1.5, 8.1]	[0.9, 9]	[0.05, 0.1]	[0.05, 1.5]	–
$\bar{\delta X}$	[0.001, 0.005]	[0.001, 0.05]	[0.01, 0.02]	[0.01, 0.02]	–
c	1.1	1	1.1	1.1	–
v	2000	5	2000	100	–
Σ	10^{-5}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	–
$\Delta \bar{X}$	[1.32, 7.182]	[0.9, 9.039]	[0.698, 1.438]	[0.568, 2.501]	[1, 9.425]
R^2	74%	81%	75%	67%	81%
R	87%	93%	89%	89%	93%

Результаты решения обратной задачи, полученные в виде модельных (рис. 2, кривые 3–4) и (рис. 3, кривые 3–4), более правдоподобны. Во-первых, $\vec{X}^{(0)}$, начальное приближение, было взято $\pm 1\%$ от оценки максимальных возможных значений \vec{X} согласно [24]. Во-вторых, это показывает то, что кривые (рис. 2, кривые 3–4) описывают обработанные экспериментальные данные ОАР (рис. 2, кривая 6) с высокой степенью подобия, близкой к эталонному решению прямой задачи (рис. 2, кривая 5). В-третьих, несмотря то, что (рис. 3, кривые 3–4) не имеют колебательного характера, как (рис. 3, кривая 5), сохраняется главное преимущество эредитарной $\alpha(t)$ -модели – описание переменной нелокальности процесса, как и сохраняется тенденция в увеличении значений $\alpha(t)$ со временем, пусть и ценой небольшой потери в точности описания экспериментальных данных ОАР.

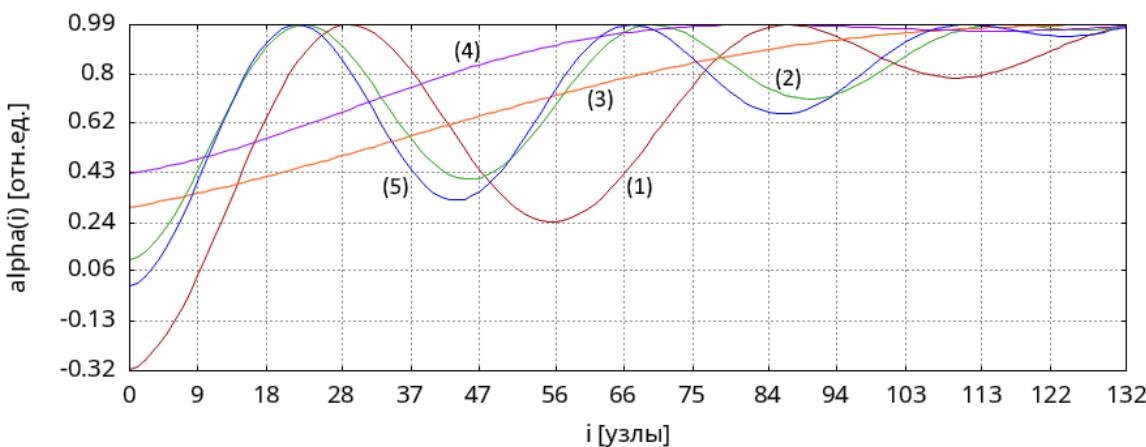


Рис. 3. Вид восстанавливаемой (8) сеточной функции $\alpha(i, \vec{X})$: (1–4) – как результат решения обратной задачи при различных управляющих параметрах (см. таблицу 1); (5) – «эталонный» вариант, подработанный вручную из [9]

Fig. 3. Type of recovered (8) grid function $\alpha(i, \vec{X})$: (1–4) – as a result of solving the inverse problem for various control parameters (see Table 1); (5) – ‘reference’ version, manually adjusted from [9]

Все расчеты в этой статье проводились на ЭВМ, расположенной в ИКИР ДВО РАН в лаборатории ЛЭМИ, со следующими характеристиками: CPU – AMD Ryzen 9 7950X, 16×4.5 GHz core, cache L2 16 Mb & L3 64 Mb; RAM – 96 Gb; GPU – GeForce RTX 4090, 24 Gb, 2235 MHz, ALU 16384.

Выводы

Из результатов можно сделать вывод о возможности решения на основе экспериментальных данных обратной задачи для эредитарной $\alpha(t)$ -модели объемной активности радона с целью идентификации оптимальных значений функции $\alpha(t)$ порядка дробной производной, характеризующей интенсивность процесса переноса радона, зависящей от двух неизвестных параметров. Получаемые результаты математического моделирования правдоподобны, однако сильно зависят от начального приближения вектора восстанавливаемых значений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Фирстов П. П., Макаров Е. О. Динамика подпочвенного радона на Камчатке и сильные землетрясения. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2018. 148 с. EDN: VXTMDH

- Firstov P.P., Makarov E.O. Dynamics of subsurface radon in Kamchatka and strong earthquakes. Petropavlovsk-Kamchatsky: Vitus Bering Kamchatka State University. 2018. 148 p. EDN: VXTMDH (In Russian)
2. Nikolopoulos D., Cantzos D., Alam A. et al. Electromagnetic and radon earthquake precursors. *Geosciences*. 2024. Vol. 14. No. 10. P. 271. EDN: YDMFHA
3. Бирюлин С. В., Козлова И. А., Юрков А. К. Исследование информативности объемной активности почвенного радона при подготовке и реализации тектонических землетрясений на примере Южно-Курильского региона // Вестник КРАУНЦ. Науки о Земле. 2019. Т. 44. № 4. С. 73–83. EDN: IMOXB
- Biryulin S.V., Kozlova I.A., Yurkov A.K. Investigation of informative value of volume radon activity in soil during both the stress build up and tectonic earthquakes in the South Kuril region. *Bulletin of KRASEC. Earth Sci.* 2019. Vol. 44. No. 4. Pp. 73–83. EDN: IMOXB. (In Russian)
4. Зубков С. И. Радоновые предвестники землетрясений // Вулканология и сейсмология. 1981. № 6. С. 74–105.
- Zubkov S.I. Radon precursors of earthquakes. *Volcanology and Seismology*. 1981. No. 6. Pp. 74–105. (In Russian)
5. Dubinchuk V.T. Radon as a precursor of earthquakes. In *Proceedings of the Isotopic geochemical precursors of earthquakes and volcanic eruption, Vienna, Austria, 9–12 September 1991*. Vienna: IAEA, 1993. Pp. 9–22.
6. Kristiansson K., Malmqvist L. Evidence for nondiffusive transport of ^{86}Rn in the ground and a new physical model for the transport. *Geophysics*. 1982. Vol. 47. No. 10. DOI: 10.1190/1.1441293
7. Mandelbrot B.B. *The fractal geometry of nature*. New York: Times Books. 1982. 468 p.
8. Evangelista L.R., Lenzi E.K. Fractional anomalous diffusion, an introduction to anomalous diffusion and relaxation. Cham: Springer. 2023. Pp. 189–236. DOI: 10.1007/978-3-031-18150-4_5
9. Tverdyi D.A., Makarov E.O., Parovik R.I. Hereditary mathematical model of the dynamics of radon accumulation in the accumulation chamber. *Mathematics*. 2023. Vol. 11. No. 4:850. DOI: 10.3390/math11040850
10. Твердый Д. А., Макаров Е. О., Паровик Р. И. Исследования напряженно-деформированного состояния геосреды эманационными методами на примере alpha(t)-модели переноса радона // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2023. Т. 44. № 3. С. 86–104. EDN: AOBZGA
- Tverdyi D.A., Makarov E.O., Parovik R.I. Research of stress-strain state of geo-environment by emanation methods on the example of alpha(t)-model of radon transport. *Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*. 2023. Vol. 44. No. 3. Pp. 86–104. EDN: AOBZGA (In Russian)
11. Uchaikin V.V. Fractional derivatives for physicists and engineers. Vol. I. *Background and Theory*. Berlin/Heidelberg: Springer. 2013. 373 p. DOI: 10.1007/978-3-642-33911-0
12. Parovik R.I., Shevtsov B.M. Radon transfer processes in fractional structure medium. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2010. Vol. 2. Pp. 180–185. DOI: 10.1134/S2070048210020055
13. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and applications of fractional differential equations*. Amsterdam: Elsevier. 2006. 523 p. EDN: YZECAT
14. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с. EDN: UGLEPD
- Nakhushhev A.M. Fractional calculus and its application. Moscow: Fizmatlit. 2003. 272 p. EDN: UGLEPD. (In Russian)
15. Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent – II. *Geophysical Journal International*. 1967. Vol. 13. No. 5. Pp. 529–539. DOI: 10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x

16. Novozhenova O.G. Life and science of Alexey Gerasimov, one of the pioneers of fractional calculus in Soviet Union. *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 2017. Vol. 20. Pp. 790–809. DOI: 10.1515/fca-2017-0040
17. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. 4-е изд. Новосибирск: Издательство Сибирского отделения РАН, 2018. 508 с. EDN: UQAVAO
Kabanikhin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and Ill-Posed Problems]: 4th ed. Novosibirsk: Izdatel'stvo Sibirs'kogo otdeleniya RAN, 2018. 508 p. EDN: UQAVAO. (In Russian)
18. Mueller J.L., Siltanen S. Linear and nonlinear inverse problems with practical applications. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2012. 351 p. DOI: 10.1137/1.9781611972344
19. Tverdyi D.A., Parovik R.I., Makarov E.O. Estimation of radon flux density changes in temporal vicinity of the Shipunskoe earthquake with MW = 7.0, 17 August 2024 with the use of the hereditary mathematical model. *Geosciences*. 2025. Vol. 15. No. 1:30. EDN: WJIKNS
20. Tverdyi D.A. Refinement of variable order fractional derivative of Gerasimov-Caputo type by multidimensional Levenberg-Marquardt optimization method. In: *Computing Technologies and Applied Mathematics. CTAM 2024. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*. 2025. Vol. 500. Pp. 159–173. EDN: IRBPFF
21. More J.J. The Levenberg-Marquardt algorithm: implementation and theory. In: *Numerical Analysis. Lecture Notes in Mathematics*. 1978. Vol. 630. Pp. 105–116. DOI: 10.1007/BFb0067700
22. Vasilyev A.V., Zhukovsky M.V. Determination of mechanisms and parameters which affect radon entry into a room. *Journal of Environmental Radioactivity*. 2013. Vol. 124. Pp. 185–190. EDN: RFGXPN
23. Tverdyi D.A., Parovik R.I. Investigation of finite-difference schemes for the numerical solution of a fractional nonlinear equation. *Fractal and Fractional*. 2022. Vol. 6. No. 1:23. EDN: XPPXOV
24. Твёрдый Д. А. Математическое моделирование вариаций объемной активности радона с учетом наследственности: модель, методы решения, программа. М.: Академия Естествознания, 2025. 186 с. EDN: QUCYFP
Tverdyi D.A. *Matematicheskoe modelirovaniye variaciy ob'emonoy aktivnosti radona s uchetom nasledstvennosti: model', metody resheniya, programma* [Mathematical modeling of variations in radon volumetric activity taking into account heredity: model, solution methods, program]. Moscow: Akademiya Estestvoznanija, 2025. 186 p. EDN: QUCYFP. (In Russian)
25. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of Mathematical Physics. London: Macmillan, 1963, 765 p.
26. Dennis J.E., Robert Jr., Schnabel B. Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations. Philadelphia: SIAM, 394 p.

Авторский вклад. Все авторы принимали непосредственное участие в планировании, выполнении и анализе данного исследования. Все авторы настоящей статьи ознакомились и одобрили представленный окончательный вариант.

Author's contribution. All authors of this paper have directly contributed to the planning, implementation, or analysis of the study. All authors of this paper have reviewed and agreed on the final version that has been submitted.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

Финансирование. Работа выполнена за счет Государственного задания ИКИР ДВО РАН (рег. № НИОКТР 124012300245-2).

Funding. The work was supported by IKIR FEB RAS State Task (No. NIOKTR 124012300245-2).

Информация об авторах

Твёрдый Дмитрий Александрович, канд. физ.-мат. наук, науч. сотр., Институт космофизических исследований и распространения радиоволн Дальневосточного отделения Российской академии наук; 684034, Россия, с. Паратунка, ул. Мирная, 7; dimsolid95@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6983-5258>, SPIN-код: 2849-4814

Паровик Роман Иванович, д-р физ.-мат. наук, профессор ДВО РАН, вед. науч. сотр., Институт космофизических исследований и распространения радиоволн Дальневосточного отделения Российской академии наук; 684034, Россия, с. Паратунка, ул. Мирная, 7; parovik@ikir.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1576-1860>, SPIN-код: 4295-6894

Information about the authors

Dmitrii A. Tverdyi, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences; 7, Mirnaya street, Paratunka village, 684034, Russia; dimsolid95@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6983-5258>, SPIN-code: 2849-4814

Roman I. Parovik, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Leading Researcher, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences; 7, Mirnaya street, Paratunka village, 684034, Russia; parovik@ikir.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1576-1860>, SPIN-code: 4295-6894