МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

*УДК 517.96* Научная статья
*DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-6-39-46*
EDN: BTKLSQ

# О единственности решения функционально-интегрального уравнения дробного порядка с инволюцией

**Л. М. Энеева**

Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук
360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

***Аннотация***. В работе исследуется функционально-интегральное уравнение с оператором дробного интегрирования и оператором инволюции, возникающие при решении краевых задач для дифференциальных уравнений, содержащих композицию лево- и правосторонних дробных производных, лежащих в основе математических моделей различных физических и геофизических процессов, и в том числе при описании диссипативных колебательных систем.

**Цель исследования** – исследование функционально-интегрального уравнения с оператором дробного интегрирования и оператором инволюции в критическом случае.

**Методы исследования**. Для решения поставленной задачи использованы методы теории интегральных уравнений первого рода, методы теории операторов и свойства вполне монотонных функций.

**Результаты**. Показано, что изучаемое уравнение эквивалентно редуцируется к вопросу о разрешимости интегрального уравнения первого рода с разностным положительным ядром в классе функций, меняющих знак под действием оператора инволюции, для которого доказана теорема о единственности его решения.

***Ключевые слова***: функционально-интегральное уравнение, дробный интеграл Римана–Лиувилля, инволюция, функция Миттаг-Леффлера, положительный оператор, вполне монотонная функция

*Поступила 10.10.2025, одобрена после рецензирования 12.11.2025, принята к публикации 17.11.2025*

**Для цитирования**. Энеева Л. М. О единственности решения функционально-интегрального уравнения дробного порядка с инволюцией // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2025. Т. 27. № 6. С. 39–46. DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-6-39-46

*MSC: 26A33, 34B05* Original article

# On uniqueness of solution to functional-integral equation of fractional order with involution

**L.M. Eneeva**

Institute of Applied Mathematics and Automation –
branch of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
89 A, Shortanov street, Nalchik, 360000, Russia

***Abstract***. The paper studies a functional integral equation with a fractional integration operator and an involution operator, which arise when solving boundary value problems for differential equations that contain a composition of left- and right-sided fractional derivatives. These equations underlie mathematical models of various physical and geophysical processes, such as describing dissipative oscillatory systems.

**Aim**. The study aims to investigate a functional integral equation with an operator of fractional integration involving an involution operator in the critical case.

**Research methods**. To solve the problem, we employ methods of the theory of integral equations of the first kind, operator theory and properties of completely monotone functions.

**Results**. It has been shown that the equation under study can be reduced to the problem of solving an integral equation of the first kind with a positive kernel, in a class of functions that change sign under the action of an operator, and for this class of functions, a theorem on the uniqueness of the solution has been proven.

***Keywords***: functional integral equation, Riemann–Liouville fractional integral, involution, Mittag-Leffler function, positive operator, completely monotone function

*Submitted 10.10.2025, approved after reviewing 12.11.2025, accepted for publication 17.11.2025*

**For citation**. Eneeva L.M. On uniqueness of solution to functional-integral equation of fractional order with involution. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS.* 2025. Vol. 27. No. 6. Pp. 39–46. DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-6-39-46

## Введение

Рассмотрим уравнение

$$u(x) + \lambda\, u(1-x) + \mu\, D_{0x}^{-\alpha}\, u(x) = f(x) \qquad (0 < x < 1), \tag{1}$$

где $D_{0x}^{-\alpha}$ – дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка $\alpha$ [1],

$$D_{0x}^{-\alpha}\, u(x) \coloneqq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x u(t)(x-t)^{\alpha-1}\, dt.$$

Функционально-интегральные уравнения вида (1) возникают при изучении дифференциальных уравнений, содержащих композицию лево- и правосторонних дробных производных [2]. Необходимость исследовать такие уравнения возникает при моделировании различных физических и геофизических процессов и, в частности, при описании диссипативных колебательных систем [3, 4]. В этой связи следует также отметить работы [5, 6], в которых исследовались дифференциальные уравнения дробного порядка с инволюцией.

В работе [7] найдены достаточные условия на параметры $\alpha$, $\lambda$ и $\mu$, обеспечивающие однозначную разрешимость уравнения (1). Кроме того, в этой работе показано, что случай $\lambda^2 = \pm 1$ является критическим и приводит к необходимости исследовать системы, содержащие интегральные уравнения первого и второго рода. В данной работе мы исследуем критический случай, а именно когда $\lambda = 1$. Для этого случая мы показываем, что вопрос о разрешимости уравнения (1) эквивалентен вопросу о разрешимости интегрального уравнения первого рода с разностным ядром, и доказываем теорему о единственности его решения.

## Вспомогательные сведения

Далее, через $I_x$ будем обозначать оператор инволюции, который действует на функцию $g(x)$ по правилу

$$I_x g(x) \coloneqq g(1-x). \tag{2}$$

Далее, $\mathcal{J}^+$ будет обозначать множество функций, инвариантных относительно операции инволюции $I_x$, т.е.

$$\mathcal{J}^+ = \{g(x)\colon\ g(x) = I_x g(x),\quad 0 < x < 1\}. \tag{3}$$

Аналогично через $\mathcal{J}^-$ обозначим множество функций, на которых действие инволюции $I_x$ меняет знак, т.е.

$$\mathcal{J}^- = \{g(x): \ g(x) = -I_x g(x), \quad 0 < x < 1\}. \qquad (4)$$

Из определений (3) и (4) непосредственно следует, что

$$g(x) + I_x g(x) \in \mathcal{J}^+ \qquad \text{и} \qquad g(x) - I_x g(x) \in \mathcal{J}^-$$

для любой функции $g(x)$, определенной в интервале $]0,1[$.

Далее нам понадобится утверждение о действии $I_x$ на свертку двух функций.

**Лемма 1**. *Пусть* $g(x), h(x) \in L(0,1)$. *Имеет место равенство*

$$I_x\left(\int_0^x g(x-t)\, h(t)\, dt\right) = \int_x^1 g(x-t)\, I_x\, h(t)\, dt. \qquad (5)$$

*Доказательство.* Действительно, в силу определения (2) имеем

$$I_x\left(\int_0^x g(x-t)\, h(t)\, dt\right) = \int_0^{1-x} g(1-x-t)\, h(t)\, dt.$$

Сделав замену $s = 1 - t$, получим

$$I_x\left(\int_0^x g(x-t)\, h(t)\, dt\right) = \int_x^1 g(s-x)\, h(1-s)\, ds.$$

Полученное равенство эквивалентно (5). □

## Редукция к интегральному уравнению

С учетом определения (2) уравнение (1) в рассматриваемом случае $\lambda = 1$ примет вид

$$u(x) + I_x u(x) + \mu\, D_{0x}^{-\alpha}\ u(x) = f(x). \qquad (6)$$

Пусть $u(x)$ – решение уравнения (6). Перепишем (6) в виде

$$u(x) + I_x u(x) = F(x), \qquad (7)$$

где

$$F(x) = f(x) - \mu\, D_{0x}^{-\alpha}\ u(x). \qquad (8)$$

Согласно лемме 1 уравнение (7) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$F(x) \in \mathcal{J}^+. \qquad (9)$$

При этом множество решений уравнения (7) совпадает с множеством функций, представимых в виде

$$u(x) = \frac{1}{2} F(x) + g(x), \qquad (10)$$

где $g(x)$ – произвольная функция из $\mathcal{J}^-$, т.е.

$$g(x) \in \mathcal{J}^-. \qquad (11)$$

Таким образом, с учетом (8) и (10) получаем, что решение уравнения (6) является решением уравнения

$$u(x) = -\tfrac{\mu}{2} D_{0x}^{-\alpha}\ u(x) + \tfrac{1}{2} f(x) + g(x). \tag{12}$$

Решение (12) для любых $f(x), g(x) \in L(0,1)$ имеет вид

$$u(x) = \frac{1}{2} f(x) + g(x) - \frac{\mu}{2} \int_0^x W(x-t) \left( \frac{1}{2} f(t) + g(t) \right) dt, \tag{13}$$

где

$$W(x) = x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\frac{\mu}{2} x^{\alpha}\right), \tag{14}$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

– функция Миттаг-Леффлера.

Таким образом, всякое решение уравнения (6), если оно существует, должно быть представимо в виде (13) для некоторой функции $g(x) \in \mathcal{J}^-$. Однако для того чтобы было верно обратное, то есть для того, чтобы функция вида (13) являлась решением (6), необходимо выполнение условия (9). Итак, далее наша цель – выяснить, для каких $g(x)$ функция (13) будет удовлетворять условию (9).

Применим к обеим частям (12) оператор $D_{0x}^{-\alpha}$, после простых преобразований получаем

$$D_{0x}^{-\alpha} u(x) = D_{0x}^{-\alpha} \left[ \frac{1}{2} f(x) + g(x) - \frac{\mu}{2} \int_0^x W(x-t) \left( \frac{1}{2} f(t) + g(t) \right) dt \right] =$$

$$= D_{0x}^{-\alpha} \left[ \frac{1}{2} f(x) + g(x) \right] - \frac{\mu}{2} \int_0^x \left[ D_{0z}^{-\alpha} W(z) \right]_{z=x-t} \left( \frac{1}{2} f(t) + g(t) \right) dt.$$

Учитывая, что

$$D_{0z}^{-\alpha} W(z) = x^{2\alpha-1} E_{\alpha,2\alpha}\left(-\frac{\mu}{2} x^{\alpha}\right),$$

имеем

$$D_{0x}^{-\alpha} u(x) = \int_0^x \left[ \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\mu}{2} (x-t)^{2\alpha-1} E_{\alpha,2\alpha}\left(-\frac{\mu}{2} (x-t)^{\alpha}\right) \right] \left( \frac{1}{2} f(t) + g(t) \right) dt.$$

Принимая во внимание формулу

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + z E_{\alpha,\alpha+\beta}(z),$$

получаем

$$D_{0x}^{-\alpha} u(x) = \int_0^x W(x-t) \left( \frac{1}{2} f(t) + g(t) \right) dt. \tag{15}$$

Далее, в силу (8) условие (9) примет вид

$$f(x) - \mu\, D_{0x}^{-\alpha}\ u(x) = I_x [f(x) - \mu\, D_{0x}^{-\alpha}\ u(x)]. \tag{16}$$

Отсюда с учетом (13) и (15) получаем

$$f(x) - I_x f(x) =$$

$$= \mu \left[ I_x \int_0^x W(x-t) \left( \frac{1}{2} f(t) + g(t) \right) dt - \int_0^x W(x-t) \left( \frac{1}{2} f(t) + g(t) \right) dt \right].$$

В силу (5) имеем

$$I_x \int_0^x W(x-t) \left( \frac{1}{2} f(t) + g(t) \right) dt = \int_x^1 W(t-x) \left( \frac{1}{2} f(1-t) + g(1-t) \right) dt.$$

Следовательно,

$$f(x) - I_x f(x) =$$

$$= \mu \left[ \int_x^1 W(t-x) \left( \frac{1}{2} I_t f(t) + I_t g(t) \right) dt - \int_0^x W(x-t) \left( \frac{1}{2} f(t) + g(t) \right) dt \right].$$

Согласно (11) имеет место равенство $I_t g(t) = -g(t)$. С учетом этого после простых преобразований приходим к соотношению

$$\int_0^1 W(|x-t|) g(t)\, dt = h(x), \tag{17}$$

где

$$h(x) = -\frac{1}{\mu} [f(x) - I_x f(x)] - \frac{1}{2} \int_0^x W(x-t) f(t)\, dt + \frac{1}{2} \int_x^1 W(t-x) I_t f(t)\, dt.$$

Сформулируем полученное в виде утверждения.

**Лемма 2.** *Пусть* $f(x) \in L(0,1)$. *Уравнение (6) имеет решение* $u(x) \in L(0,1)$ *тогда и только тогда, когда уравнение (17) имеет решение* $g(x)$ *в классе* $L(0,1) \cap \mathcal{J}^-$. *В этом случае для каждой функции* $g(x) \in L(0,1) \cap \mathcal{J}^-$, *являющейся решением уравнения (17), решение* $u(x)$ *имеет вид (13).*

*Доказательство.* Действительно, вопрос о разрешимости уравнения (6), как следует из (13), эквивалентен существованию функции $g(x)$ из класса $\mathcal{J}^-$, которая обеспечивает выполнение условия (9), или, что то же самое, при которой справедливо равенство (16). Последнее, как показано выше, эквивалентно разрешимости (17). □

## Единственность решения

Как известно, функция Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\beta}(-x)$ является вполне монотонной при $x > 0$, если $\alpha \in ]0,1[$ и $\beta \geq \alpha$ (см. [8, 9]). Из свойств вполне монотонных функций (см. [10]) следует, что функция $W(x)$, заданная равенством (14), также является вполне монотонной, если $\mu > 0$. Отсюда, в частности, следует, что

$$W(x) > 0, \qquad W'(x) < 0 \qquad \text{и} \qquad W''(x) > 0 \qquad (x > 0). \tag{18}$$

Неравенства (18) позволяют заключить, что функция $W(x)$ образует симметричное ядро положительного оператора в $L_2(0,1)$. Более точно пусть

$$Qg(x) := \int_0^1 W(|x-t|)\, g(t)\, dt \tag{19}$$

и

$$J(g) \coloneqq \int_0^1 g(x)\, Qg(x) dx. \tag{20}$$

Тогда [1, с. 38]

$$J(g) \geq 0 \qquad \text{и} \qquad J(g) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) \equiv 0. \tag{21}$$

**Теорема.** *Пусть* $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ *и* $\mu > 0$. *Уравнение (6) не может иметь более одного решения* $u(x) \in L_2(0,1)$.

*Доказательство.* Предположим, что уравнение (6) имеет два различных решения $u_1(x), u_2(x) \in L_2(0,1)$. Тогда в силу линейности (6) их разность $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ будет решением однородного уравнения

$$u(x) + I_x u(x) + \mu\, D_{0x}^{-\alpha}\; u(x) = 0.$$

В этом случае в силу леммы 2 $u(x)$ будет иметь вид

$$u(x) = g(x) - \frac{\mu}{2} \int_0^x W(x-t)\; g(t)\, dt, \tag{22}$$

где функция $g(x)$ является решением уравнения

$$\int_0^1 W(|x-t|) g(t)\, dt = 0 \tag{23}$$

из класса $L_2(0,1) \cap \mathcal{J}^-$. Умножая уравнение (23) на $g(x)$ и интегрируя затем по $x$ в пределах от 0 до 1, принимая во внимание обозначения (19) и (20), получаем, что $J(g) = 0$. Отсюда в силу (19) следует, что $g(x) \equiv 0$. С учетом (22) это означает, что $u(x) \equiv 0$, или, что то же самое, $u_1(x) \equiv u_2(x)$. Таким образом, предположение о существовании двух различных решений неверно. Это завершает доказательство теоремы. □

## О существовании решения

В завершение отметим следующее. Из (21) следует, что симметричное ядро $K(x,t) = W(|x-t|)$ является замкнутым в $L_2(0,1)$ и, следовательно, его собственные функции образуют полную ортогональную систему в $L_2(0,1)$. Отсюда в силу теоремы Пикара (см. [11, с. 51]), можем заключить, что интегральное уравнение (17) имеет решение для таких функций $h(x)$, которые являются истокопредставимыми с помощью ядра $K(x,t)$. Однако для дальнейшего построения решения уравнения (6) с помощью формулы (13) необходимо, чтобы функция $g(x)$, найденная как решение уравнения (17), принадлежала $\mathcal{J}^-$, то есть удовлетворяла соотношению $g(x) = -I_x\, g(x)$. Это поднимает вопрос о необходимости дополнительных требований к функции $h(x)$ и, следовательно, к функции $f(x)$ и заслуживает отдельного исследования.

## Заключение

Таким образом, проведено исследование уравнения (1) в случае $\lambda = 1$, который является для рассматриваемого уравнения критическим. Показано, что в данном случае разрешимость этого уравнения эквивалентна разрешимости интегрального уравнения (17) в классе функций $L(0,1) \cap \mathcal{J}^-$. Показано, что симметричное ядро $K(x,t)$ уравнения (17) образует положительный оператор. На основе этого факта доказана теорема о единственности рассматриваемого уравнения. Более того, показано, что ядро $K(x,t)$ является замкнутым, то есть соответствующие ему собственные функции образуют полную ортогональную систему в $L_2(0,1)$. Однако этого оказывается недостаточным для того, чтобы сделать содержательные выводы о существовании решения, и этот вопрос требует дополнительного изучения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с. EDN: UGLEPD

2. *Энеева Л. М.* К вопросу о решении смешанной краевой задачи для уравнения с производными дробного порядка с различными началами // Доклады Адыгской международной академии наук. 2023. Т. 23. № 4. С. 62–68. DOI: 10.47928/1726-9946-2023-23-4-62-68

3. *Рехвиашвили С. Ш.* Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики // Письма в журнал технической физики. 2004. Т. 30. № 2. С. 33–37. EDN: RDBIHN

4. *Рехвиашвили С. Ш.* К определению физического смысла дробного интегро-дифференцирования // Нелинейный мир, 2007. Т. 5. № 4. С. 194–197. EDN: IAWYWN

5. *Энеева Л. М.* Задача Коши для уравнения дробного порядка с инволюцией // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2024. Т. 48. № 3. С. 43–55. DOI: 10.26117/2079-6641-2024-48-3-43-55

6. *Энеева Л. М.* Начальная задача для уравнения дробного порядка с производной Герасимова–Капуто с инволюцией // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2024. Т. 26. № 6. С. 19–25. DOI: 10.35330/1991-6639-2024-26-6-19-257. EDN: BOUNKR

7. *Энеева Л. М.* Интегральное уравнение дробного порядка с инволюцией // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2025. Т. 52. № 3. С. 63–74. EDN: EOPADJ. DOI: 10.26117/2079-6641-2025-52-3-63-74

8. *Джрбашян М. М., Багиян Р. А.* Об интегральных представлениях и мерах, ассоциированных с функциями типа Миттаг-Леффлера // Известия Академии наук Армянской ССР. Математика. 1975. Т. 10. № 6. С. 483–508.

9. *Джрбашян М. М., Багиян Р. А.* Об интегральных представлениях и мерах, ассоциированных с функциями типа Миттаг-Леффлера // Доклады Академии наук СССР. 1975. Т. 223. № 6. С. 1297–1300.

10. *Miller K. S., Samko S. G.* Completely monotonic functions // Integral Transforms and Special Functions. 2001. Vol. 12. No 4. Pp. 389–402. DOI: 10.1080/10652460108819360

11. Bitsadze A. V. Integral Equations of First Kind. Singapore: World Scientific, 1995. 265 p. ISBN10: 9810222637

## REFERENCES

1. Nakhushev A.M. *Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye* [Fractional Calculus and its Application]. Moscow: FIZMATLIT, 2003. 272 p. EDN: UGLEPD. (In Russian)

2. Eneeva L.M. On the question of solving a mixed boundary value problem for an equation with fractional derivatives with different origins. *Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences.* 2023. Vol. 23. No. 4. Pp. 62–68. DOI: 10.47928/1726-9946-2023-23-4-62-68. (In Russian)

3. Rekhviashvili S.Sh. Lagrange formalism with fractional derivative in problems of mechanics. *Technical Physics Letters.* 2004. Vol. 30. No. 2. Pp. 33–37. EDN: RDBIHN. (In Russian)

4. Rekhviashvili S.Sh. Fractional derivative physical interpretation. *Nonlinear World.* 2007. Vol. 5. No. 4. Pp. 194–197. EDN: IAWYWN. (In Russian)

5. Eneeva L.M. Cauchy problem for fractional order equation with involution. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2024. Vol. 48. No. 3. Pp. 43–55. DOI: 10.26117/2079-6641-2024-48-3-43-55. EDN: RHKXQA. (In Russian)

6. Eneeva L.M. Initial value problem for a fractional order equation with the Gerasimov–Caputo derivative with involution. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS*. 2024. Vol. 26. No. 6. Pp. 19–25. DOI: 10.35330/1991-6639-2024-26-6-19-25. EDN: BOUNKR. (In Russian)

7. Eneeva L.M. Fractional integral equation with involution. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2025. Vol. 52. No. 3. Pp. 63–74. EDN: EOPADJ. DOI: 10.26117/2079-6641-2025-52-3-63-74. (In Russian)

8. Dzhrbashyan M.M., Bagiyan R.A. On integral representations and measures associated with Mittag-Leffler type functions. *Izvestiya Academii nauk Armynskoi SSR. Matematika*. 1975. Vol. 10. No. 6. Pp. 483–508. (In Russian)

9. Dzhrbashyan M.M., Bagiyan R.A. On integral representations and measures associated with functions of Mittag-Leffler type. *Doklady Akademii nauk SSSR*. 1975. Vol. 223. No. 6. Pp. 1297–1300. (In Russian)

10. Miller K.S., Samko S.G. Completely monotonic functions. *Integral Transforms and Special Functions*. 2001. Vol. 12. No 4. Pp. 389–402. DOI: 10.1080/10652460108819360

11. Bitsadze A.V. Integral equations of first kind. Singapore: World Scientific, 1995. 265 p. ISBN10: 9810222637

**Финансирование**. Работа выполнена в рамках государственного задания Института прикладной математики и автоматизации – филиала Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук (тема № 125031904215-5).

**Funding**. The work was carried out within the framework of state assignments of Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (theme No. 125031904215-5).

**Информация об авторе**

**Энеева Лиана Магометовна**, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. отдела математического моделирования геофизических процессов, Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук;

360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А;

eneeva72@list.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2530-5022, SPIN-код: 3403-8412

**Information about the author**

**Liana M. Eneeva**, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Mathematical Modeling of Geophysical Processes, Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences;

89 A, Shortanov street, Nalchik, 360000, Russia;

eneeva72@list.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2530-5022, SPIN-code: 3403-8412