МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 517.44 Научная статья
DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-6-30-38
EDN: BJSKOG

Об обращении преобразования Лапласа одной функции, содержащей гиперболический тангенс

Ф. Г. Хуштова

Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук
360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

Аннотация. В работе рассматривается обращение преобразования Лапласа одной функции, содержащей гиперболический тангенс. Указанная функция возникает при решении краевой задачи в ограниченной области с условиями второго и третьего рода для уравнения теплопроводности.

Цель исследования – обращение преобразования Лапласа функции, возникающей при решении краевой задачи с условиями второго и третьего рода для уравнения теплопроводности.

Результаты. Используя теорему о вычетах и методы теории функций комплексного переменного, получили обращение рассматриваемой функции в двух формах, пригодных для больших и малых значений времени. В первом случае обратное преобразование записывается в виде ряда из экспоненциальных функций с постоянными коэффициентами, во втором случае – в виде ряда из сверток Лапласа специальных функций.

Выводы и заключение. Полученные результаты могут быть использованы при построении решения краевой задачи для уравнения теплопроводности в ограниченной области с условием второго рода на одной из границ и условием третьего рода – на другой в форме, пригодной для малых значений времени. В теории уравнений математической физики решение аналогичной задачи построено методом разделения переменных в форме, хорошо описывающей процессы теплопередачи для больших значений времени. Но такая форма оказывается неудобной в случае малых значений времени по причине плохой сходимости ряда Фурье по собственным функциям задачи.

Ключевые слова: преобразование Лапласа, теорема о вычетах, лемма Жордана, гиперболический тангенс, интеграл вероятности, полиномы Лагерра

Поступила 30.10.2025, одобрена после рецензирования 25.11.2025, принята к публикации 02.12.2025

Для цитирования. Хуштова Ф. Г. Об обращении преобразования Лапласа одной функции, содержащей гиперболический тангенс // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2025. Т. 27. № 6. С. 30–38. DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-6-30-38

MSC: 44A10 Original article

On inversion of Laplace transform of function, involving hyperbolic tangent

F.G. Khushtova

Institute of Applied Mathematics and Automation –
branch of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
89 A, Shortanov street, Nalchik, 360000, Russia

Abstract. The paper examines the inverse of the Laplace transform with a hyperbolic tangen function. This function arises when solving a boundary value problem in a bounded domain governed by the heat equation, subject to boundary conditions of the second and third kind.

Aim. To determine the inverse Laplace transform of a function that emerges from solving a boundary value problem, specifically a second or third type condition, associated with the heat equation

Results. Using the residue theorem and the theory of a complex variable functions, we derive the inverse transform, suitable for large and small time values. In the first case, the inverse transform is expressed as a series of exponential functions with constant coefficients; in the second case, as a series of Laplace convolutions of special functions.

Conclusion and deduction. The derived results constitute a basis for constructing a solution to the boundary value problem for the heat equation in a bounded domain with a second-order condition on one of the boundaries and a third-order condition on the other, in a form suitable for small time values. In the context of mathematical physics, a solution to a similar problem is derived via separation of variables suitable for characterizing heat transfer processes for large time values. However, this proves inconvenient given sufficiently small temporal values, due to poor convergence properties pertaining to the Fourier series expansion involving eigenfunctions of the problem.

***Keywords**:* Laplace transform, residue theorem, Jordan's lemma, hyperbolic tangent, probability integral, Laguerre polynomials

Submitted 30.10.2025, approved after reviewing 25.11.2025, accepted for publication 02.12.2025

For citation. Khushtova F.G. On inversion of Laplace transform of function, involving hyperbolic tangent. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS.* 2025. Vol. 27. No. 6. Pp. 30–38. DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-6-30-38

Введение

Методы интегральных преобразований остаются одними из наиболее эффективных методов решения различных линейных дифференциальных и интегральных уравнений, возникающих в прикладных задачах математики, математической физики, механики и других областях науки. Наличие большого количества таблиц и справочников по интегральным преобразованиям значительно упрощает процесс нахождения решения исследуемых задач.

В некоторых случаях, если функция, прообраз которой нужно вычислить, отсутствует в современных таблицах и справочниках по интегральным преобразованиям, разрешить проблему в терминах известных функций позволяет теорема о вычетах и использование других важных теорем теории функций комплексного переменного.

При решении операционными методами задач для уравнения теплопроводности важное место занимает преобразование Лапласа.

В данной работе рассмотрим обращение преобразования Лапласа функции, возникающей при решении краевой задачи с условиями второго и третьего рода для уравнения теплопроводности [1].

1. Вспомогательные сведения

Как известно, преобразование Лапласа ставит в соответствие функции $f(t)$ действительной переменной t функцию $f(s)$ комплексной переменной s с помощью интеграла [2, с. 30; 3, с. 211; 4, с. 33]

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt. \tag{1}$$

Если функция $f(t)$ кусочно-непрерывна при $t \geq 0$, $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$, имеет ограниченную степень роста, то есть существуют такие положительные постоянные A и σ, что для всех $t > 0$

$$|f(t)| \leq Ae^{\sigma t},$$

то интеграл (1) сходится в области $\mathrm{Re}s > \sigma$, причем в области $\mathrm{Re}s \geq \sigma_0 > \sigma$ этот интеграл сходится равномерно.

Класс функций $f(t)$, допускающих преобразование Лапласа, может быть расширен. Пусть функция $f(t)$ определена для всех $t \geq 0$ и существует такое комплексное число s_0, что сходится интеграл

$$\int_0^\infty e^{-s_0 t} f(t)dt < M.$$

Тогда для всех s, удовлетворяющих условию $\mathrm{Re}s > \mathrm{Re}s_0$, сходится интеграл (1).

Функция $\bar{f}(s)$, определенная через функцию $f(t)$ с помощью преобразования (1), называется *изображением Лапласа* $f(t)$ функции $f(t)$. Функция $f(t)$ называется *оригиналом* функции $f(s)$. Связь функций $f(t)$ и $f(s)$ символически обозначают следующим образом:

$$f(t) \risingdotseq \bar{f}(s) \quad \text{или} \quad \bar{f}(s) \risingdotseq f(t).$$

Если известно изображение $f(s)$, то формула обратного преобразования Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}\,\bar{f}(s)ds, \quad \gamma > \sigma \tag{2}$$

определяет функцию $f(t)$ в точках ее непрерывности. Формула (2) называется *формулой Меллина*.

Приведем здесь некоторые свойства преобразования Лапласа, необходимые для дальнейшего исследования.

1. *Изображение производной.* Если функция $f'(t)$ удовлетворяет условиям существования изображения и $f(t) \risingdotseq f(s)$, то

$$f'(t) \risingdotseq s\bar{f}(s) - f(0). \tag{3}$$

2. *Изображение свертки.* Если $f_1(t) \risingdotseq f_1(s)$, $f_2(t) \risingdotseq f_2(s)$, то

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \risingdotseq \bar{f}_1(s)\bar{f}_2(s). \tag{4}$$

3. *Изображение интеграла с весовой функцией.* Если $f(t) \risingdotseq f(s)$, то

$$\int_0^\infty f(\tau)\chi(\tau,t)d\tau \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{s}}\,\bar{f}(\sqrt{s}), \quad \chi(\tau,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{\tau^2}{4t}}. \tag{5}$$

Изображения некоторых функций

Известно, что [6, с. 220]

$$\chi(\alpha,t) \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{s}}\,e^{-\alpha\sqrt{s}}, \quad \alpha \geq 0. \tag{6}$$

Пусть

$$\mathrm{Erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-\tau^2}\,d\tau$$

– интеграл вероятности [6, с. 333; 8, с.30]. Справедливо изображение [6, с. 210]

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \alpha e^{\alpha^2 t}\mathrm{Erfc}\left(\alpha\sqrt{t}\right) \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{s}+\alpha}. \tag{7}$$

Пусть

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\left(t^n e^{-t}\right), \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

– полиномы Лагерра [7, с.188; 8, с. 100]. Имеет место формула [2, с. 421; 6, с. 158]

$$e^{\alpha t}L_n(\beta t) \risingdotseq \frac{(s-\beta-\alpha)^n}{(s-\alpha)^{n+1}}, \quad \mathrm{Re}\, s > \alpha. \tag{8}$$

2. Основные результаты

Пусть $a \geq 0, \quad l > 0$. Обозначим $E(a, l; t) \equiv E(t), \ \bar{E}(a, l; s) \equiv \bar{E}(s)$ и рассмотрим контурный интеграл

$$E(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{ts}\,\bar{E}(s)\,ds, \quad \gamma > 0, \tag{9}$$

где

$$\bar{E}(s) = \frac{1}{\sqrt{s}\,\mathrm{th}\sqrt{s}l + a}. \tag{10}$$

Вычислим интеграл (9). Для этого исследуем подынтегральную функцию (10). Функция (10) является однозначной функцией от s, полюсы ее – корни уравнения

$$\mathrm{th}\sqrt{s}l = -\frac{a}{\sqrt{s}}. \tag{11}$$

Известно [9, с. 117], что уравнение (11) имеет только действительные корни, причем все корни – простые, и они расположены вдоль оси $\mathrm{Re}s < 0$. Обозначим $s = -\lambda^2$. Тогда уравнение (11) перепишется в виде

$$\mathrm{ctg}\lambda l = \frac{\lambda}{a}. \tag{12}$$

Функция $y_1(\lambda) = \mathrm{ctg}\lambda l$ является нечетной периодической функцией, убывающей на каждом интервале $(\pi n/l, \pi(n+1)/l), \quad n \in \mathbb{Z}$. Функция $y_2(\lambda) = \lambda/a$ является нечетной возрастающей функцией. Поэтому уравнение (12) имеет бесчисленное множество попарно противоположных по знаку и равных по абсолютному значению корней λ, причем каждый последующий корень больше предыдущего:

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$

Так как $s_n = -\lambda_n^2$, то рассмотрим только положительные значения корней λ_n.

Для вычисления $E(t)$ рассмотрим интеграл

$$\int_C e^{ts}\,\bar{E}(s)\,ds,$$

по контуру C, изображенному на рис. 1 и состоящему из отрезка AB, параллельного мнимой оси, и левой полуокружности C_R радиуса R.

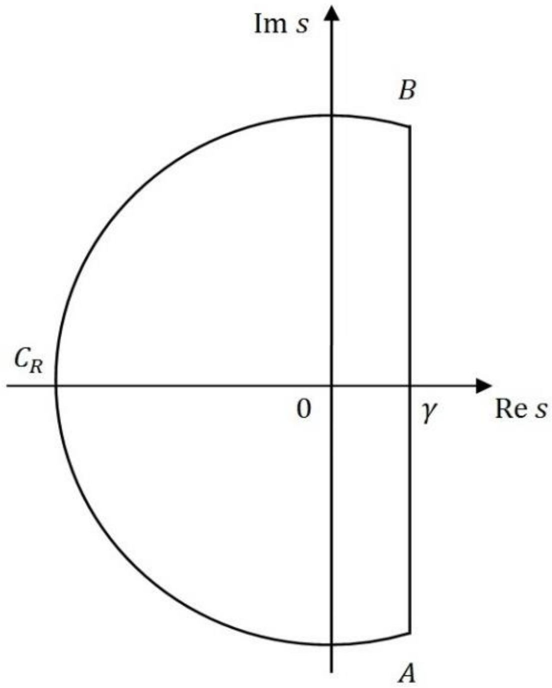

Рис. 1. / ***Fig. 1***.

Выберем радиус полуокружности $R = n^2\pi^2/l^2$, если $a \neq 0$, и $R = (n + 1/2)^2\pi^2/l^2$, если $a = 0$. В этом случае ни один из полюсов не будет лежать на C_R. При $n \to \infty$ интеграл по отрезку AB перейдет в искомый интеграл (9), а интеграл по полуокружности C_R согласно лемме Жордана и в силу предельного соотношения

$$\lim_{\substack{|s|\to+\infty \\ s\in C_R}} \sqrt{s}\bar{E}(s) = 1$$

обратится в нуль. По теореме о вычетах [2, с. 47] получаем

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname*{Res}_{s=s_n} [e^{ts}\bar{E}(s)].$$

Пусть

$$\Phi(s) = \mathrm{ch}\sqrt{s}l,$$

$$\Psi(s) = \sqrt{s}\,\mathrm{sh}\sqrt{s}l + a\,\mathrm{ch}\sqrt{s}l. \tag{13}$$

Тогда функцию $\bar{E}(s)$ можно представить в виде отношения двух обобщенных полиномов $\Phi_1(s) = s\Phi(s)$ и $\Psi_1(s) = s\Psi(s),\ s \neq 0$:

$$\bar{E}(s) = \frac{\Phi_1(s)}{\Psi_1(s)}.$$

Известно, что [10, с. 109]

$$\lim_{s\to s_n} \frac{\Phi_1(s)}{\Psi_1{}'(s)} = \lim_{s\to s_n} \frac{\Phi(s)}{\Psi'(s)},$$

где s_n – корни уравнения $\Psi(s) = 0$. Вычеты функции $e^{ts}E(s)$ можно найти по формуле [2, с. 47; 4, с. 166]

$$\operatorname*{Res}_{s=s_n}[e^{ts}\bar{E}(s)] = \frac{\Phi(s_n)}{\Psi'(s_n)}\ e^{s_n t}.$$

Найдем $\Psi'(s_n)$, учитывая при этом, что s_n – корни уравнения (11). Из (13) имеем

$$\Psi'(s) = \mathrm{ch}\sqrt{s}l\left[\frac{l}{2} + \frac{la+1}{2\sqrt{s}}\mathrm{th}\sqrt{s}l\right].$$

Подставляя вместо $\mathrm{th}\sqrt{s}l$ выражение (11), можем записать

$$\Psi'(s) = \mathrm{ch}\sqrt{s}l\ \frac{l(s-a^2)-a}{2s}.$$

Так как $s_n = -\lambda_n^2$, где λ_n – корни уравнения (12), то

$$c_n = \lim_{s\to s_n}\frac{\Phi(s)}{\Psi\prime(s)} = \frac{2\ \lambda_n^2}{l(\lambda_n^2+a^2)+a}. \quad (14)$$

Таким образом, обратное преобразование Лапласа функции $E(s)$ находим в форме

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, e^{-\lambda_n^2 t}, \quad t > 0, \quad (15)$$

где коэффициенты c_n определяются из (14).

Учитывая равенство $a = \lambda_n \mathrm{tg}\lambda_n l$, коэффициенты c_n можно записать также в виде

$$c_n = \frac{2\ \lambda_n \cos^2\lambda_n l}{l\lambda_n + \sin\lambda_n l\cos\lambda_n l}.$$

Получим другую форму записи функции $E(t)$. Обозначив $p = \sqrt{s}$ и воспользовавшись равенством

$$p\ \mathrm{sh}\, pl + a\ \mathrm{ch}\, pl = \frac{p+a}{2}\ e^{pl}\left(1 - \frac{p-a}{p+a}e^{-2pl}\right), \quad (16)$$

а также представлением

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad |q| < 1,$$

запишем функцию (10) в виде

$$\bar{E}(s) = 2\mathrm{ch}\, pl \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p-a)^n}{(p+a)^{n+1}} e^{-(2ln+l)p}. \quad (17)$$

Пусть

$$\bar{T}_n(s) = \frac{2\mathrm{ch}\, pl}{p} e^{-(2ln+l)p},$$

$$\bar{f}_n(a,s) = \frac{(p-a)^n}{p(p+a)^{n+1}}, \quad \bar{E}_n(a,s) = s\bar{f}_n(a,s).$$

Тогда функция (17) примет вид

$$\bar{E}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{T}_n\,(s)\bar{E}_n(a,s). \quad (18)$$

Функцию $T_n(s)$ запишем следующим образом:

$$\bar{T}_n(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\; e^{-2ln\sqrt{s}} + \frac{1}{\sqrt{s}}\; e^{-(2ln+2l)\sqrt{s}}. \quad (19)$$

Из формулы (6) следует

$$\bar{T}_n(s) \risingdotseq T_n(t) = \chi(2ln,t) + \chi(2ln+2l,t)\;.$$

Воспользовавшись формулами (5) и (8), получаем, что

$$\bar{f}_n(a,s) \risingdotseq \int_0^{\infty} e^{-a\tau}\, L_n(2a\tau)\chi(\tau,t)\; d\tau.$$

Свойство (3) позволяет нам записать

$$\bar{E}_n(a,s) \risingdotseq E_n(a,t) = \int_0^{\infty} e^{-a\tau}\, L_n(2a\tau)\chi_t'(\tau,t)\; d\tau.$$

Применяя теперь к равенству (18) свойство (4), окончательно находим

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n\,(t) * E_n(a,t). \quad (20)$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Утверждение. *Пусть* $a \geq 0$, $l > 0$. *Тогда обратное преобразование Лапласа функции*

$$\bar{E}(s) = \frac{1}{\sqrt{s}\; th\sqrt{s}l + a}$$

может быть записано в двух эквивалентных формах:

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, e^{-\lambda_n^2 t},$$

где

$$c_n = \frac{2\,\lambda_n^2}{l(\lambda_n^2 + a^2) + a},$$

λ_n – *положительные корни трансцендентного уравнения* $\mathrm{ctg}\lambda l = \lambda / a$, *и*

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n\,(t) * E_n(a,t)\;,$$

где

$$T_n(t) = \chi(2ln,t) + \chi(2ln+2l,t)\;, \quad \chi(\tau,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\; e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,,$$

$$E_n(a,t) = \int_0^{\infty} e^{-a\tau}\, L_n(2a\tau)\chi_t{}'(\tau,t)\; d\tau, \quad L_n(\tau) = \frac{e^{\tau}}{n!}\frac{d^n}{d\tau^n}(\tau^n e^{-\tau}).$$

Частные случаи. Если $a = 0$, то $\lambda_n = \pi n/l$, $c_n = 2/b$ и функция (15) запишется в виде

$$E(0,l;t) = \frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t}, \qquad t > 0. \tag{21}$$

При $a = 0$ из (18) находим

$$E(0,l;t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty}[\chi(2ln,t) + \chi(2ln+2l,t)].$$

Таким образом, имеет место равенство

$$\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[e^{-\frac{l^2 n^2}{t}} + e^{-\frac{l^2(n+1)^2}{t}}\right], \quad t > 0.$$

Рассмотрим предельный случай $l = \infty$. В этом случае функция (10) принимает вид

$$\bar{E}(a,\infty;s) = \frac{1}{\sqrt{s}+a}.$$

Из формулы (7) находим

$$E(a,\infty;t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - ae^{a^2 t}\mathrm{Erfc}\left(a\sqrt{t}\right). \tag{22}$$

Если $a = 0$, $l = \infty$, то из (22) следует $E(0,\infty;t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ремизова О. И., Соснин М. Л.* Операционный метод построения функций Грина для малых времен, соответствующих решению краевых задач для уравнений переноса параболического типа // Вестник МИХТ им. М. В. Ломоносова. 2011. Т. 6. № 3. С. 116–119. EDN: OHJVKN

2. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматлит, 1961.

3. *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1967.

4. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971.

5. *Галицын А. С., Жуковский А. Н.* Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. Киев: Наукова думка, 1976.

6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, 1969. Т. 1. 344 с.

7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966.

8. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М.: Физматлит, 1963. 358 с.

9. *Карлоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964.

10. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.

REFERENCES

1. Remizova O.I., Sosnin M.L. Operational method for constructing Green's functions for small times corresponding to the solution to the boundary value problems for transfer equations of parabolic type. *Fine Chemical Technologies*. 2011. Vol. 6. No. 3. Pp. 116–119. EDN: OHJVKN. (In Russian)

2. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Integral'nye preobrazovaniya i operacionnoe ischislenie* [Integral transforms and operational calculus]. Moscow: Fizmatlit, 1961. (In Russian)

3. Sveshnikov A.G., Tihonov A.N. The theory of functions of a complex variable. Moscow: MIR PUBLISHERS, 1978. (In Russian)

4. Doetsch G. Guide to the applications of the Laplace and Z-transforms. London: Van Nostrand Reinhold Company, 1971.

5. Galitsyn A.S., Zhukovsky A.N. *Integral'nye preobrazovaniya i special'nye funkcii v zadachah teploprovodnosti* [Integral transforms and special functions in heat conduction problems]. Kiev: Naukova Dumka, 1976. (In Russian)

6. Bateman G., Erdelyi A. *Tablicy integral'nyh preobrazovaniy* [Tables of integral transforms]. Moscow: Nauka, 1969. Vol. 1. 344 p. (In Russian)

7. Bateman G., Erdelyi A. *Vysshie transcendentnye funkcii* [Higher transcendental functions]. Vol. 2. Moscow: Nauka, 1966. (In Russian)

8. Lebedev N.N. Special functions and their applications. Prentice-Hall, Inc, 1965.

9. Carslaw H.S., Jaeger J.C. Conduction of heat in solids. Oxford: Oxford University Press. 1959.

10. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of Heat Conduction]. Moscow: Vysshaya shkola, 1967. (In Russian)

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Института прикладной математики и автоматизации – филиала Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук (тема № 125031904191-2).

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment of the Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (topic No. 125031904191-2).

Информация об авторе

Хуштова Фатима Гидовна, канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. отдела дробного исчисления, Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук;

360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А;

khushtova@yandex.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4088-3621, SPIN-код: 6803-4959

Information about the author

Fatima G. Khushtova, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Department of Fractional calculus, Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences;

89 A, Shortanov street, Nalchik, 360000, Russia;

khushtova@yandex.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4088-3621, SPIN-code: 6803-4959