МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 517.95 Научная статья
DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-6-24-29
EDN: BHXCHC

Нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения Маккендрика – фон Ферстера дробного порядка

Ф. М. Лосанова✉, Р. О. Кенетова

Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук
360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

Аннотация. В работе рассматривается нагруженное уравнение Маккендрика – фон Ферстера дробного порядка.

Цель исследования – доказать, что при соблюдении условий регулярности функций начальных и граничных условий существует единственное решение нагруженного уравнения в рассматриваемой области Ω.

Методы исследования. Решение найдено путем редуцирования к системе интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода. Применялся аппарат дробного исчисления.

Результаты. Доказаны существование и единственность решения нелокальной краевой задачи для нагруженного уравнения Маккендрика – фон Ферстера дробного порядка, а также получена явная его форма в виде интегральных выражений.

Выводы. Результаты имеют важное значение для математического моделирования популяционной динамики с учетом возрастных аспектов и диффузионных эффектов с памятью, реализуемых через дробные производные. Полученные выводы расширяют теоретическую базу для анализа подобных дифференциальных уравнений и могут быть использованы для дальнейших исследований в области математической биологии и теории дифференциальных уравнений с памятью.

Ключевые слова: производная Герасимова – Капуто, нагруженное уравнение, уравнения Маккендрика – фон Ферстера, функция Райта, уравнения дробного порядка

Поступила 02.10.2025, одобрена после рецензирования 02.11.2025, принята к публикации 17.11.2025

Для цитирования. Лосанова Ф. М., Кенетова Р. О. Нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения Маккендрика – фон Ферстера дробного порядка // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2025. Т. 27. № 6. С. 24–29. DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-6-24-29

MSC: 35A02, 35C15 Original article

Nonlocal boundary value problem for the McKendrick – von Foerster loaded equation of fractional-order

F.M. Losanova✉, R.O. Kenetova

Institute of Applied Mathematics and Automation –
branch of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
89 A, Shortanov street, Nalchik, 360000, Russia

Abstract. The paper considers McKendrick–von Foerster loaded equation of fractional-order.

Aim. The study aims to demonstrate the existence of a unique solution 'loaded equation' within Ω, contingent upon satisfaction of regularity conditions.

Research methods. The convergence towards a solution was achieved via a reduction to a Volterra integral equation system, specifically of the second order. Employed the fractional calculus operator.

Results. Given the McKendrick – von Foerster loaded equation of fractional-order, the existence and uniqueness of a solution to a nonlocal boundary value problem is proven. An explicit representation of the solution is derived, expressed as integral equations.

Conclusion. The derived results facilitate mathematical modeling, specifically applied to population dynamics. Consider age-structured populations and incorporate diffusion phenomena exhibiting memory effects, formally representable via fractional-order derivatives. The derived theorems augment the axiomatic foundation for analyzing said differential equations, enabling further investigation in mathematical biology and the theory of integro-differential equations.

Keywords: Gerasimov – Caputo derivative, loaded equation, McKendrick – von Foerster equations, Wright function, fractional order equations

Submitted 02.10.2025, approved after reviewing 02.11.2025, accepted for publication 17.11.2025

For citation. Losanova F.M., Kenetova R.O. Nonlocal boundary value problem for the McKendrick – von Foerster loaded equation of fractional-order. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS.* 2025. Vol. 27. No. 6. Pp. 24–29. DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-6-24-29

Введение

В области $\Omega = \{(x,t): 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим нагруженное уравнение вида

$$u_x(x,t) + \lambda \partial_{0t}^{\alpha} u(x,t) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(x_k,t) = f(x,t), \tag{1}$$

где λ, λ_k – заданные вещественные числа, $\lambda \neq 0$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \neq 0$, x_k – фиксированные точки внутри интервала $(0,1)$, $f(x,t)$ – заданная вещественная функция, $\partial_{0t}^{\alpha} u(x,t)$ – регуляризованная дробная производная Герасимова – Капуто порядка α, $0 < \alpha < 1$, определяемая равенством [1]

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_\eta(x,\eta)}{(t-\eta)^{\alpha}} d\eta.$$

Уравнение (1) относится к классу нагруженных дифференциальных уравнений. При $\alpha = 1$ и $\lambda_k = 0$ уравнение (1) называется уравнением неразрывности Маккендрика – фон Ферстера [2, с. 244].

Уравнение вида (1) при $\alpha = 1$ и $\lambda_k = 0$ было рассмотрено многими авторами. Для линейного дифференциального уравнения вида (1) с постоянными коэффициентами решена задача Коши в прямоугольной области в работе [3]. Для уравнения (1) с оператором Римана – Лиувилля с переменными коэффициентами в работе [4] доказана теорема об однозначной разрешимости краевой задачи в прямоугольной области, а в работе [5] для того же уравнения доказаны теоремы существования и единственности решения задачи Коши в нелокальной постановке. В [6] рассмотрена краевая задача для уравнения в частных производных дробного порядка, не превосходящего единицу в области с криволинейной границей. При $\alpha = 1$ в работе [7] была рассмотрена динамика популяции, основанная на возрастной модели, учитывающей эффект «насыщения».

В работе [8] для уравнения (1) при $\lambda_k = 0$ рассмотрена динамика возрастной структуры популяции с интегральным условием, а в [9] решена ее обратная задача.

В работе [10] для уравнения (1) при $k = 1$ была рассмотрена динамика численности популяции с возрастной структурой с учетом миграции.

В математическом моделировании уравнение (1) можно использовать для описания развития замкнутой популяции особей с учетом межвозрастных взаимодействий и миграционных процессов, где функция $u(x,t)$ определяет плотность численности популяции возраста x в момент времени t.

Постановка задачи

Введем понятие регулярного решения.

Определение. *Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u = u(x,t)$ из класса $u(x,t) \in C(\bar{\Omega})$, функция $u(x,t)$ непрерывно дифференцируема по x, является абсолютно непрерывной как функция переменной t на отрезке $[0,1]$ при каждом x из интервала $(0,1)$, а также удовлетворяет уравнению (1).*

Исследуется следующая задача

Задача. *В области Ω требуется найти регулярное решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(x,0) = \tau(x), \qquad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

где $\tau(x), \varphi(t)$ – заданные функции.

Представление решения

Перепишем уравнение (1) в виде

$$u_x(x,t) + \lambda \partial_{0t}^{\alpha} u(x,t) = F(x,t), \tag{4}$$

где

$$F(x,t) = f(x,t) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(x_k,t). \tag{5}$$

Для решения задачи (2), (3) для уравнения (4) воспользуемся представлением решения [11, с. 64]

$$u(x,t) = \int_0^x \tau(\xi) t^{-\alpha} e_{1,\alpha}^{1,1-\alpha}\left(-\frac{x-\xi}{t^{\alpha}}\right) d\xi + \int_0^t \int_0^x \frac{F(\xi,\eta)}{t-\eta} e_{1,\alpha}^{1,0}\left(-\frac{x-\xi}{(t-\eta)^{\alpha}}\right) d\xi d\eta. \tag{6}$$

Подставим (5) в уравнение (6):

$$u(x,t) + \int_0^t \int_0^x \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(x_k,\eta)}{t-\eta} e_{1,\alpha}^{1,0}\left(-\frac{x-\xi}{(t-\eta)^{\alpha}}\right) d\xi d\eta =$$

$$= \int_0^x \tau(\xi) t^{-\alpha} e_{1,\alpha}^{1,1-\alpha}\left(-\frac{x-\xi}{t^{\alpha}}\right) d\xi + \int_0^t \int_0^x \frac{f(\xi,\eta)}{t-\eta} e_{1,\alpha}^{1,0}\left(-\frac{x-\xi}{(t-\eta)^{\alpha}}\right) d\xi d\eta. \tag{7}$$

После небольших преобразований уравнение (7) перепишем в виде

$$u(x,t) + \int_0^t \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(x_k,\eta)\, K(x,t,\eta) d\eta = F_1(x,t), \tag{8}$$

где

$$K(x,t,\eta) = \int_0^x \frac{1}{t-\eta} e_{1,\alpha}^{1,0}\left(-\frac{x-\xi}{(t-\eta)^{\alpha}}\right) d\xi = (t-\eta)^{\alpha-1} e_{1,\alpha}^{1,\alpha}\left(-\frac{x-\xi}{(t-\eta)^{\alpha}}\right),$$

$$F_1(x,t) = \int_0^t \int_0^x \frac{f(\xi,\eta)}{t-\eta} e_{1,\alpha}^{1,0}\left(-\frac{x-\xi}{(t-\eta)^{\alpha}}\right) d\xi d\eta - \int_0^x \tau(\xi) t^{-\alpha} e_{1,\alpha}^{1,1-\alpha}\left(-\frac{x-\xi}{t^{\alpha}}\right) d\xi.$$

Пусть в уравнении (8) $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k u(x_k,t) = U(t)$. При $x \to x_i$, домножим (8) на λ_i и суммируем по i, $1 < i < n$. Тогда получим систему интегральных уравнений:

$$U(t) + \int_0^t U(\eta)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i K(x_i,t,\eta)\,d\eta = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_1(x_i,t). \quad (9)$$

Уравнение (9) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода с ядром $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i K(x_i,t,\eta)$, решение которого выписывается в виде

$$U(t) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_1(x_i,t) + \int_0^t R(x_i,t,\eta)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, F_1(x_i,\eta)d\eta, \quad (10)$$

где $R(x_i,t,\eta)$ – резольвента ядра

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i K(x_i,t,\eta) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i (t-\eta)^{\alpha-1} e_{1,\alpha}^{1,\alpha}\left(-\frac{x_i-\xi}{(t-\eta)^{\alpha}}\right).$$

Основной результат работы

В работе доказана следующая

Теорема. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $\tau(x) \in C[0,1]$, $\varphi(t) \in C[0,T]$, $R(x_i,t,\eta)$, $F_1(x_i,t)$ *и* $f(x,t) \in C(\bar{\Omega})$, $f(x,t)$ *удовлетворяет условию Гельдера по одной из переменных, и выполнено условие согласования* $\varphi(0) = \tau(0)$.

Тогда существует единственное регулярное решение уравнения (1) в области Ω, *удовлетворяющее условиям (2) и (3), и имеет вид*

$$u(x,t) = \int_0^x \tau(\xi) t^{-\alpha} e_{1,\alpha}^{1,1-\alpha}\left(-\frac{x-\xi}{t^{\alpha}}\right)d\xi +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\left[f(\xi,\eta) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, F_1(x_i,\eta) + \int_0^{\eta} R(x_i,\eta,\chi)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, F_1(\xi_i,\chi)d\chi\right]\times$$

$$\times\frac{1}{t-\eta} e_{1,\alpha}^{1,0}\left(-\frac{x-\xi}{(t-\eta)^{\alpha}}\right)d\xi d\eta.$$

Заключение

Таким образом, в данной работе было рассмотрено нагруженное уравнение дробного порядка. Было установлено, что при соблюдении условий регулярности функций начальных и граничных условий существует единственное решение уравнения в области Ω. Решение было найдено путем редуцирования к системе интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода.

Доказаны существование и единственность решения поставленной задачи, а также получена явная его форма в виде интегральных выражений. Результаты имеют важное значение для математического моделирования популяционной динамики с учетом возрастных аспектов и диффузионных эффектов с памятью, реализуемых через дробные производные. Полученные выводы расширяют теоретическую базу для анализа подобных дифференциальных уравнений и могут быть использованы для дальнейших исследований в области математической биологии и теории дифференциальных уравнений с памятью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с. EDN: UGLEPD

2. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с. EDN: PDBBNB

3. *Псху А. В.* Краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2002. № 1(8). С. 76–78. EDN: VOVONL

4. *Мамчуев М. О.* Краевая задача для уравнения первого порядка с частной производной дробного порядка с переменными коэффициентами // Доклады АМАН. 2009. Т. 11. № 1. С. 32–35. EDN: OHVXZT

5. *Мамчуев М. О.* Задача Коши в нелокальной постановке для уравнения первого порядка с частной производной дробного порядка с переменными коэффициентами // Доклады АМАН. 2009. Т. 11. № 2. С. 21–24. EDN: OHLUYD

6. *Псху А. В.* О краевой задаче для уравнения в частных производных дробного порядка в области с криволинейной границей // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 8. С. 1076–1082. DOI: 10.1134/S0374064115080117

7. *Кайгермазов А. А., Кудаева Ф. Х.* Стационарные состояния обобщенной популяционной модели Вейбулла // Южно-Сибирский научный вестник. 2015. № 1(19). С. 10–14. EDN: TPEXPD

8. *Лосанова Ф. М., Кенетова Р. О.* Нелокальная задача для обобщенного уравнения МакКендрика – фон Ферстера с оператором Капуто // Нелинейный мир. 2018. Т. 16. № 1. С. 49–53. EDN: YQLELZ

9. *Лосанова Ф. М.* Обратная задача для уравнения Мак-Кендрика – фон Ферстера с оператором Капуто // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 40. № 3. С. 111–118. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-111-118

10. *Лосанова Ф. М., Кенетова Р. О.* Краевая задача для нагруженного уравнения Маккендрика – фон Ферстера дробного порядка // Доклады АМАН. 2023. Т. 23. № 4. С. 28–33. DOI: 10.47928/1726-9946-2023-23-4-28-33. EDN: UUZSAY

11. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с. EDN: QJPLZX

REFERENCES

1. Nakhushev A.M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional calculus and its applications]. Moscow: FIZMATLIT, 2003. 272 p. EDN: UGLEPD. (In Russian)

2. Nakhushev A.M. *Uravneniya matematicheskoy biologii* [Equations of mathematical biology]. Moscow: Vysshaya shkola, 1995. 301 p. EDN: PDBBNB. (In Russian)

3. Pskhu A.V. Boundary value problem for fractional partial differential equation. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS.* 2002. No. 1(8). Pp. 76–78. EDN: VOVONL. (In Russian)

4. Mamchuev M.O. Boundary value problem for a first-order partial differential equation of fractional order with variable coefficients. *Adyghe Int. Sci. J.* 2009. Vol. 11. No. 1. Pp. 32–35. EDN: OHVXZT. (In Russian)

5. Mamchuev M.O. Cauchy problem in a nonlocal statement for a first-order partial differential equation of fractional order with variable coefficients. *Adyghe Int. Sci. J.* 2009. Vol. 11. No. 2. Pp. 21–24. EDN: OHLUYD. (In Russian)

6. Pskhu A.V. On a boundary value problem for a partial differential equation of fractional order in a domain with a curvilinear boundary. *Differential Equations*. 2015. Vol. 51. No. 8. Pp. 1076–1082. DOI: 10.1134/S0374064115080117. (In Russian)

7. Kaygermazov A.A., Kudayeva F.Kh. Steady states of the generalized Weibull population model. *South-Siberian Scientific Bulletin*. 2015. Vol. 17. No. 1(19). mart. Pp. 10–14. EDN: TPEXPD. (In Russian)

8. Losanova F.M., Kenetova R.O. Nonlocal problem for the generalized McKendrick – von Foerster equation with the Caputo operator. *Nonlinear World*. 2018. Vol. 16. No. 1. Pp. 49–53. EDN: YQLELZ. (In Russian)

9. Losanova F.M. Inverse problem for McKendrick von Foerster equation with Caputo operator. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2022. Vol. 40. No. 3. Pp. 111–118. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-111-118. (In Russian)

10. Losanova F.M., Kenetova R.O. Boundary value problem for the loaded McKendrick – von Foerster equation of fractional order. *Adyghe Int. Sci. J.* 2023. Vol. 23. No. 4. Pp. 28–33. DOI: 10.47928/1726-9946-2023-23-4-28-33. EDN: UUZSAY. (In Russian)

11. Pskhu A.V. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* [Fractional Partial Differential Equations]. Moscow: Nauka, 2005. 199 p. EDN: QJPLZX. (In Russian)

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflict of interest.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Института прикладной математики и автоматизации – филиала Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук (тема № 125031904191-2).

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment of the Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (topic No. 125031904191-2).

Информация об авторах

Лосанова Фатима Мухамедовна, науч. сотр. лаборатории синергетических проблем, Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук;

360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А;

losanovaf@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6342-7162, SPIN-код: 8328-6335

Кенетова Раиса Османовна, канд. физ.-мат. наук, заведующий лабораторией синергетических проблем, Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук;

360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А;

kenetova_r@mail.ru, SPIN-код: 8888-9163

Information about the authors

Fatima M. Losanova, Researcher, Laboratory of Synergetic Problems, Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences;

89 A, Shortanov street, Nalchik, 360000, Russia;

losanovaf@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6342-7162, SPIN-code: 8328-6335

Raisa O. Kenetova, Candidate of Physics and Mathematics, Head of Laboratory of Synergetic Problems, Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences;

89 A, Shortanov street, Nalchik, 360000, Russia;

kenetova_r@mail.ru, SPIN-code: 8888-9163