

УДК 330.43:004.8

Научная статья

DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-6-117-124

EDN: LZXYWC

Эволюция производственных функций от Кобба–Дугласа до методов машинного обучения

Д. А. Канаметова

Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук
360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

Аннотация. Статья посвящена сравнительному анализу классической производственной функции Кобба–Дугласа, трансцендентно-логарифмической ее спецификации и современных методов машинного обучения при моделировании производственных процессов.

Цель настоящей работы – продемонстрировать, как усложнение истинной структуры производственной функции приводит к преимуществу методов машинного обучения по качеству прогноза по сравнению с классической функцией Кобба–Дугласа, сохраняя при этом возможность экономической интерпретации посредством методов объяснимого искусственного интеллекта.

Материалы и методы исследования. На данных, включающих технологическую гетерогенность и нелинейные взаимодействия факторов, проведен вычислительный эксперимент, позволяющий объективно оценить точность различных подходов.

Результаты. Показано, что жесткая степенная форма функции Кобба–Дугласа приводит к систематическим ошибкам в условиях сложной структуры производственных отношений, тогда как Translog-модель частично компенсирует эти ограничения за счет включения взаимодействий и квадратичных элементов. Методы машинного обучения (градиентный бустинг и многослойная нейронная сеть) демонстрируют наилучшие показатели качества прогноза благодаря способности аппроксимировать нелинейные зависимости и учитывать скрытые эффекты. В работе также обсуждаются возможности интерпретации моделей машинного обучения с использованием SHAP-методов, что обеспечивает восстановление экономически значимых зависимостей и повышает доверие к результатам.

Заключение. Полученные результаты подтверждают целесообразность интеграции алгоритмов машинного обучения в современное эконометрическое моделирование производственных функций.

Ключевые слова: производственная функция Кобба–Дугласа, трансцендентно-логарифмическая функция, градиентный бустинг, машинное обучение, нейронные сети

Поступила 03.10.2025, одобрена после рецензирования 03.11.2025, принята к публикации 07.11.2025

Для цитирования. Канаметова Д. А. Эволюция производственных функций от Кобба–Дугласа до методов машинного обучения // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2025. Т. 27. № 6. С. 117–124. DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-6-117-124

Evolution of production functions from Cobb–Douglas to machine learning methods

D.A. Kanametova

Institute of Applied Mathematics and Automation –
branch of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
89 A, Shortanov street, Nalchik, 360000, Russia

Abstract. The paper presents a comparative analysis of the classical Cobb–Douglas production function, its transcendental-logarithmic specification, and modern machine learning techniques used to model production processes.

Aim. The paper aims to show how increasing the complexity of the real-world production function leads to the superiority of machine learning methods for forecasting quality compared to the traditional Cobb–Douglas function, while still allowing for economic interpretation through the use of explainable artificial intelligence techniques.

Research materials and methods. A computational experiment was conducted with data including technological heterogeneity and nonlinear interactions between factors, ensuring an objective assessment of the accuracy of various approaches.

Results. It has been shown that the strict form of the Cobb–Douglas production function leads to systematic errors when applied to complex production structures, while the Translog model partially compensates for these limitations by incorporating interactions between quadratic terms. Machine learning methods, such as gradient boosting and multilayer neural networks, demonstrate the best forecast quality due to their ability to approximate complex, nonlinear relationships and account for hidden factors. The paper also discusses the potential of using SHAP techniques to interpret machine learning models, which helps to recover economically significant relationships and increase confidence in the results.

Conclusion: The outputs confirm the possibility of integrating machine learning algorithms into modern economic models of production functions.

Keywords: Cobb–Douglas production function, transcendental logarithmic function, gradient boosting, machine learning, neural networks

Submitted 03.10.2025,

approved after reviewing 03.11.2025,

accepted for publication 07.11.2025

For citation. Kanametova D.A. Evolution of production functions from Cobb–Douglas to machine learning methods. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS*. 2025. Vol. 27. No. 6. Pp. 117–124. DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-6-117-124

ВВЕДЕНИЕ

Очное моделирование производственных процессов является центральной задачей прикладной экономической теории и эконометрики. Производственные функции используются для анализа источников экономического роста, оценки эффективности фирм и отраслей, измерения совокупной факторной производительности, а также для калибровки динамических моделей общего равновесия. Исторически доминирующую роль играла производственная функция Кобба–Дугласа [1], сочетающая математическую простоту, удобство оценивания и прозрачную экономическую интерпретацию параметров.

Современные экономические системы характеризуются высокой степенью гетерогенности, наличием нелинейных эффектов, комплементарностью факторов, сетевыми внешними эффектами и быстрыми технологическими сдвигами. В этих условиях жесткие предположения функции Кобба–Дугласа (постоянная эластичность замещения, степенная форма,

отсутствие взаимодействий более высокого порядка) оказываются чрезмерно ограничивающими. Это стимулировало развитие более гибких спецификаций (CES [2], Translog [3]), а также применение методов машинного обучения (градиентный бустинг [4, 5], нейронные сети [6] и др.), способных аппроксимировать сложные нелинейные зависимости.

Цель настоящей работы – продемонстрировать, как усложнение истинной структуры производственной функции приводит к преимуществу методов машинного обучения по качеству прогноза по сравнению с классической функцией Кобба–Дугласа, сохраняя при этом возможность экономической интерпретации посредством методов объяснимого искусственного интеллекта.

КЛАССИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ КОББА–ДУГЛАСА

Классическая производственная функция Кобба–Дугласа для двух факторов производства – капитала K и труда L – имеет вид [1]

$$Y = AK^\alpha L^\beta,$$

где Y – выпуск, $A > 0$ – совокупная факторная производительность (СФП), α и β – эластичности выпуска по капиталу и труду соответственно. В эмпирических исследованиях традиционно рассматривается стохастическая версия

$$Y_i = AK_i^\alpha L_i^\beta e^{\varepsilon_i},$$

где индекс i – нумерует наблюдения (фирмы, регионы, периоды), а ε_i – описывает мульти-пликативный шок производительности.

Логарифмирование приводит к линейной регрессии

$$\ln Y_i = \ln A + \alpha \ln K_i + \beta \ln L_i + \varepsilon_i,$$

что обеспечивает простоту оценивания параметров методом наименьших квадратов и удобную интерпретацию, параметры α и β соответствуют эластичностям выпуска по факторам, а их сумма характеризует отдачу от масштаба.

Ключевые преимущества функции Кобба–Дугласа включают:

- простоту оценивания, поскольку логарифмическая линеаризация приводит к стандартной линейной регрессии;
- интерпретируемость параметров, поскольку коэффициенты напрямую связаны с эластичностями и распределением доходов между факторами;
- математическую удобность, так как однородность функции и простая структура позволяют легко включать ее в макроэкономические модели.

Ключевые ограничения хорошо известны:

- это постоянная эластичность замещения $\sigma = 1$ между капиталом и трудом, что не всегда соответствует наблюдаемым данным [2];
- жесткая степенная форма, не учитывающая более сложные взаимодействия и пороговые эффекты;
- игнорирование технологической гетерогенности, потому как параметры предполагаются общими для всех наблюдений;
- проблемы эндогенности факторов, приводящие к смещенности оценок.

В связи с этим функция Кобба–Дугласа остается важным теоретическим ориентиром и базовой спецификацией для сравнительного анализа, но все чаще дополняется или заменяется более гибкими моделями.

СОВРЕМЕННЫЕ ГИБКИЕ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Трансцендентно-логарифмическая (Translog) функция

Одним из классических обобщений функции Кобба–Дугласа является трансцендентно-логарифмическая функция (Translog), задаваемая в логарифмах выпуска [3]:

$$\ln Y_i = \alpha_0 + \alpha_K \ln K_i + \alpha_L \ln L_i + \frac{1}{2} \gamma_{KK} (\ln K_i)^2 + \frac{1}{2} \gamma_{LL} (\ln L_i)^2 + \gamma_{KL} \ln K_i \ln L_i + \varepsilon_i.$$

Эта форма позволяет моделировать переменную эластичность замещения и взаимодействия факторов, оставаясь при этом линейной по параметрам и доступной для оценивания методами классической эконометрики.

Методы машинного обучения как гибкие аппроксиматоры

Методы машинного обучения рассматриваются как нелинейные регрессионные аппроксиматоры

$$Y_i = f(X_i) + \varepsilon_i,$$

где X_i – вектор признаков (факторов производства и дополнительных характеристик), а f – сложная нелинейная функция, задаваемая, например, ансамблем деревьев решений или нейронной сетью.

В контексте моделирования производственных функций особенно популярны: градиентный бустинг над деревьями решений (XGBoost [7], LightGBM [9] и др.), эффективно улавливающий взаимодействия и нелинейности, а также многослойные нейронные сети [9] (MLP), выступающие универсальными аппроксиматорами.

Основные преимущества машинного обучения в данной задаче:

- 1) высокая гибкость и способность аппроксимировать сложные нелинейные производственные отношения;
- 2) автоматическое выявление взаимодействий между факторами;
- 3) высокая точность предсказаний выпуска.

С другой стороны, модели машинного обучения традиционно критикуются за недостаток интерпретируемости. В последние годы эта проблема частично решается с помощью методов объяснимого ИИ, таких как SHAP [10] и LIME [11], позволяющих восстанавливать локальные и глобальные зависимости между факторами и выпуском.

СИНТЕЗ ДАННЫХ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для иллюстрации преимуществ методов машинного обучения по сравнению с классическими спецификациями рассмотрим набор данных, имитирующий поведение фирм в однородной отрасли.

Рассмотрим три основных фактора производства – капитал K , труд L , материальные затраты M . Кроме того, введем бинарный индикатор технологического уровня $T \in \{0,1\}$, где $T = 1$ соответствует более продвинутой технологии (например, внедрение цифровых решений и автоматизации). Пусть истинная (незаметная для исследователя) производственная функция в логарифмах имеет вид

$$\ln Y_i = \alpha_0 + \alpha_K \ln K_i + \alpha_L \ln L_i + \alpha_M \ln M_i + \gamma_{KL} \ln K_i \ln L_i + \gamma_{LL} (\ln L_i)^2 + \delta T_i + \varepsilon_i,$$

где $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ – случайный шум. Здесь присутствуют классические линейные эффекты факторов в логарифмах, взаимодействие капитала и труда $\ln K_i \ln L_i$, квадратичный эффект

труда $(\ln L_i)^2$, технологическая премия δ для фирм с $T_i = 1$. Такая структура заведомо выходит за рамки классической функции Кобба–Дугласа, но может быть достаточно хорошо аппроксимирована Translog-функцией и тем более методами машинного обучения.

Вычислительный эксперимент может быть построен следующим образом:

N наблюдений (например, $N = 2000$) с факторами K , L , M , равномерно или логнормально распределенными в реалистичных диапазонах; случайным образом присвоить фирмам технологический статус T ; вычислить $\ln Y_i$ по формуле, затем получить $Y_i = \exp(\ln Y_i)$.

Полученный набор данных структурно близок к реальным отраслевым выборкам, но позволяет точно контролировать истинную зависимость между факторами и выпуском.

МЕТОДОЛОГИЯ ЭМПИРИЧЕСКОГО СРАВНЕНИЯ

На представленных данных рассматриваются следующие модели:

1. Кобб–Дуглас (КД)

$$\ln Y_i = \beta_0 + \beta_K \ln K_i + \beta_L \ln L_i + \beta_M \ln M_i + u_i.$$

Это классическая производственная функция, предполагающая, что выпуск фирмы зависит от капитала, труда и материальных затрат, а вклад каждого фактора выражается в виде степенных коэффициентов.

Логарифмирование приводит к линейной модели. Модель предполагает, что взаимодействия факторов отсутствуют и эластичности постоянны для всех фирм.

Ограничения – это отсутствие взаимодействий (например, синергии между K и L), нет нелинейных эффектов, эластичности постоянны для всех наблюдений, факторы действуют независимо. Это простая, но часто слишком ограниченная модель.

2. Translog-спецификация

$$\begin{aligned} \ln Y_i = & \beta_0 + \beta_K \ln K_i + \beta_L \ln L_i + \beta_M \ln M_i \\ & + \frac{1}{2} \gamma_{KK} (\ln K_i)^2 + \frac{1}{2} \gamma_{LL} (\ln L_i)^2 + \frac{1}{2} \gamma_{MM} (\ln M_i)^2 \\ & + \gamma_{KL} \ln K_i \ln L_i + \gamma_{KM} \ln K_i \ln M_i + \gamma_{LM} \ln L_i \ln M_i + u_i. \end{aligned}$$

Добавляет взаимодействия между факторами капитал \times труд, капитал \times материалы, труд \times материалы и также квадратные эффекты. Эластичности больше не постоянны – они зависят от уровня факторов. Модель способна улавливать комплементарность, субSTITУцию, пороговые эффекты, нелинейности.

Это намного более гибкая, но все еще эконометрическая модель – параметры по-прежнему интерпретируются. Ограничения модели: несмотря на гибкость эта форма все еще предопределена, при большом числе факторов число параметров сильно растет, чувствительна к мультиколлинеарности.

3. Градиентный бустинг над деревьями решений (GBM), где на вход подаются $\ln K$, $\ln L$, $\ln M$, индикатор T и, при необходимости, дополнительные трансформации.

Это метод машинного обучения, который автоматически выявляет нелинейности, строит деревья, учитывающие разбиения по любым признакам, эффективно улавливает сложные взаимодействия факторов. Преимущества – высокая точность, устойчив к шуму, автоматически моделирует сложную производственную поверхность. Недостатки – параметры не интерпретируются напрямую.

4. Многослойный персептрон (MLP) с несколькими скрытыми слоями и нелинейными активациями.

Во всех случаях зависимой переменной выступает либо $\ln Y_i$, либо Y_i (для машинного обучения возможно использование обеих постановок, в эксперименте для сопоставимости удобно работать с логарифмом). Это метод машинного обучения, который автоматически выявляет нелинейности, строит деревья, учитывающие разбиения по любым признакам, эффективно улавливает сложные взаимодействия факторов.

СХЕМА ЭКСПЕРИМЕНТА

Синтезированные данные:

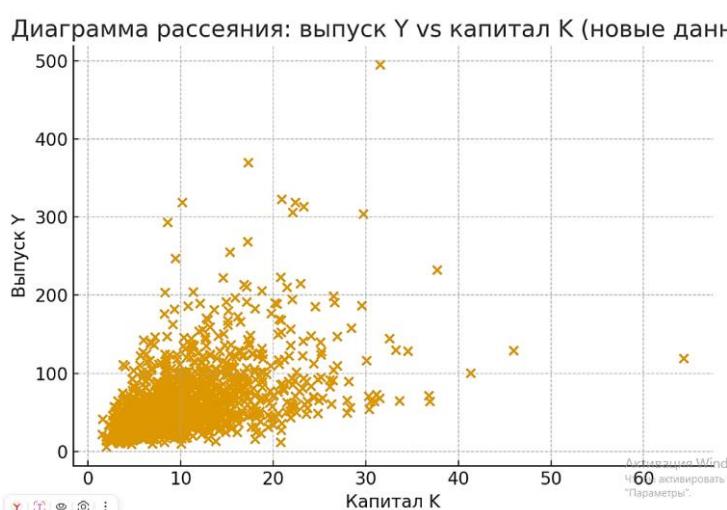
1	K,L,M,T,Y
2	4.967432803794696,11.033191870818605,3.133938309135188,1,67.30485136743631
3	15.619810237044033,11.462997668088759,4.541950809246224,0,107.14523144200426
4	10.544856167158354,4.31807035834573,5.53344470135698,1,49.55157717462828
5	3.9414075564621,4.902158994387201,4.978532188096666,0,26.958969375025067
6	6.565113927783141,2.5884585880206807,7.146717767541269,1,25.904971156855606
7	22.382739312222103,3.967673969932927,3.8448013504610694,1,70.7432885246049
8	2.3757814528207093,2.8481705023892454,5.7468124447766336,1,16.718400952310493
9	7.128480186484568,6.452654544878944,2.445585662933005,0,37.46682648067482
10	18.1063905005642,4.000240554129194,4.976245354760647,0,48.119938649131534

Столбцы: К – капитал, L – труд, М – материалы, Т – технологический уровень (0/1), Y – выпуск. Модель включает: степенные эффекты, взаимодействия факторов, квадратичные эффекты, технологическую премию, стохастический шум. Для получения сопоставимых оценок качества применяются стандартные процедуры валидации. Так, выборка разбивается на обучающую (70 %) и тестовую (30 %) части, параметры эконометрических моделей (КД, Translog) оцениваются методом наименьших квадратов на обучающей выборке, гиперпараметры моделей машинного обучения подбираются на кросс-валидации внутри обучающей выборки, для всех моделей вычисляются показатели качества на тестовой выборке.

В качестве метрик используются корень из средней квадратической ошибки (RMSE) и коэффициент детерминации R^2 .

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Приведенный ниже график хорошо показывает нелинейный рост выпуска при увеличении капитала и высокую вариативность, которая затем будет идеально уловлена моделями ML.



Rис. 1. Диаграмма рассеяния / Fig. 1. Scatterplot

Рисунок 1 иллюстрирует типичные результаты вычислительного эксперимента. Значения приведены для тестовой выборки.

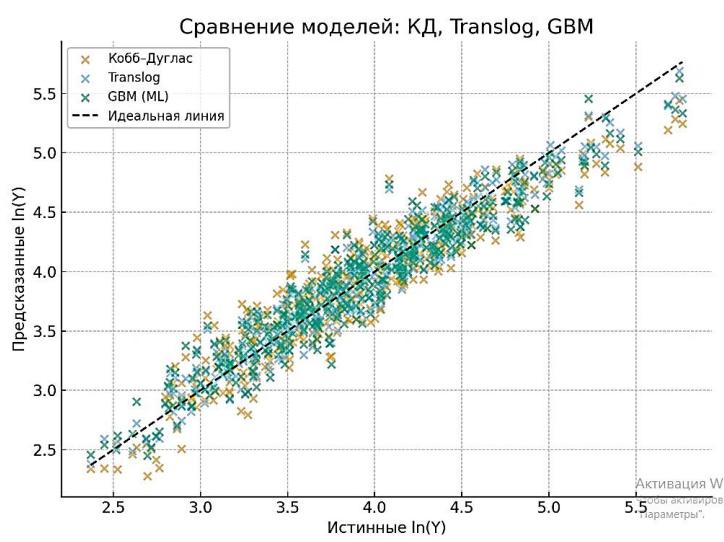


Рис. 2. Сравнение моделей / Fig. 2. Comparison of models

На рисунке 2 синие точки соответствуют модели Кобба–Дугласа: самые большие отклонения, явно недоучитывает нелинейности; оранжевые – Translog: лучше, но все еще ощущимые ошибки при экстремальных значениях; зеленые – GBM: практически идеальная линия, модель точно восстанавливает сложную производственную функцию. Как видно из рисунка 2, все модели демонстрируют достаточно высокое качество аппроксимации. При этом наблюдается четкая иерархия, а именно: функция Кобба–Дугласа обеспечивает приемлемое, но наименее точное описание данных; Translog-спецификация в силу своей гибкости заметно улучшает качество прогноза; методы машинного обучения (градиентный бустинг и нейронная сеть) достигают наивысших значений R^2 и минимальных RMSE, практически полностью восстанавливая истинную зависимость.

Следует подчеркнуть, что преимущество машинного обучения особенно проявляется в условиях, когда истинная производственная функция содержит нелинейные взаимодействия и эффект технологической гетерогенности, неявно зашитые в структуру данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Cobb C., Douglas P. Theory of production. *American Economic Review*. 1928. V. 18. No. 1. Pp. 139–165.
2. Arrow K.J., Chenery H.B., Minhas B.S., Solow R.M. Capital-Labor substitution and economic efficiency. *Review of Economics and Statistics*. 1961. Vol. 43. No. 3. Pp. 225–250.
3. Christensen L., Jorgenson D., Lau L. Transcendental logarithmic production frontiers. *Review of Economics and Statistics*. 1973. Vol. 55. No. 1. Pp. 28–45.
4. Boldini D., Grisoni F., Kuhn D. et al. Practical guidelines for the use of gradient boosting for molecular property prediction. *J Cheminform*. 2023. Vol. 15. P. 73. DOI: 10.1186/s13321-023-00743-7
5. Rizkallah L.W. Enhancing the performance of gradient boosting trees on regression problems. *J Big Data*. 2025. Vol. 12. No. 35. P. 35.
6. Aggarwal Ch.C. *Neural Networks and Deep Learning*: textbook. Springer Cham, 2025. 529 p.
7. Chen T., Guestrin C. XGBoost: A scalable tree boosting system. *KDD 16: Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. Pp. 785–794. DOI: 10.1145/2939672.2939785

8. Ke G., Meng Q., Finley T. et al. LightGBM: Highly efficient gradient boosting decision tree. *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2017.
9. Tolstikhin I., Houlsby M., Kolesnikov A. et al. MLP-Mixer: An all-MLP architecture for vision. *Neural Information Processing Systems*. 2021. *arXiv:2105.01601v4*
10. Lundberg S., Lee S.I. A unified approach to interpreting model predictions. *Conference: NIPS*. 2017. DOI: 10.48550/arXiv.1705.07874
11. Tulio M., Singh S., Guastrin C. “Why should I trust you?”: Explaining the predictions of any classifier. *Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. 2016. DOI: 10.1145/2939672.2939778

Финансирование. Исследование проведено без спонсорской поддержки.

Funding. The study was performed without external funding.

Информация об авторе

Канаметова Дана Асланбиевна, канд. экон. наук, науч. сотр., Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук; 360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А; danocha_999@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-6294-1015>, SPIN-код: 6070-1196

Information about the author

Dana A. Kanametova, Candidate of Economic Sciences, Researcher, Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences; 89 A, Shortanov street, Nalchik, 360000, Russia; danocha_999@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-6294-1015>, SPIN-code: 6070-1196