МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 517.95
DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-6-13-23
EDN: AMSYXU

Научная статья

Смешанная краевая задача для одного разрывно-нагруженного параболического уравнения

М. М. Кармоков[1], М. А. Керефов[1], С. Х. Геккиева✉[2]

[1]Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х. М. Бербекова
360004, Россия, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173
[2]Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук
360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А

Аннотация. Статья посвящена актуальным вопросам теории уравнений в частных производных, связанных с исследованием краевых задач для нагруженных параболических уравнений с оператором дробного интегро-дифференцирования, представляющих интерес как с точки зрения развития данной теории, так и в связи с многочисленными приложениями исследуемых задач.

Цель исследования – доказательство однозначной разрешимости смешанной краевой задачи для разрывно-нагруженного параболического уравнения с дробной производной Римана – Лиувилля.

Методы исследования. В работе использованы метод функции Грина, теория потенциала простого слоя, теория дробного исчисления.

Результаты. В работе доказана однозначная разрешимость смешанной краевой задачи для нагруженного параболического уравнения дробного порядка.

Заключение. Полученные результаты важны для развития теории краевых задач для уравнений в частных производных дробного порядка, в том числе нагруженных уравнений параболического типа, а также математического моделирования различных процессов и систем с распределенными параметрами, имеющих фрактальную структуру.

Ключевые слова: краевые задачи, параболические уравнения, оператор дробного интегро-дифференцирования, нагруженное уравнение, регулярное решение

Поступила 10.10.2025, одобрена после рецензирования 12.11.2025, принята к публикации 02.12.2025

Для цитирования. Кармоков М. М., Керефов М. А., Геккиева С. Х. Смешанная краевая задача для одного разрывно-нагруженного параболического уравнения // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2025. Т. 27. № 6. С. 13–23. DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-6-13-23

MSC: 35K20

Original article

Mixed boundary value problem for one discontinuously loaded parabolic equation

M.M. Karmokov[1], M.A. Kerefov[1], S.Kh. Gekkieva✉[2]

[1]Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov
173, Chernyshevsky street, Nalchik, 360004, Russia
[2]Institute of Applied Mathematics and Automation –
branch of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
89A, Shortanov street, Nalchik, 360000, Russia

Abstract. This article is devoted to current issues in the theory of partial differential equations related to the study of boundary value problems for loaded parabolic equations with a fractional integro-differentiation operator, which are of interest not only for the advancement of this specific theory, but also for their numerous applications.

Aim. The study is to prove the unique solvability of a mixed boundary value problem for a discontinuously loaded parabolic equation with the Riemann–Liouville fractional derivative.

Research methods. The study employs the Green's function method, simple layer potential theory, and fractional calculus theory.

Results. This paper demonstrates the unique solvability of a mixed boundary value problem for a loaded fractional-order parabolic equation.

Conclusion. The results obtained are significant for the development of the theory of boundary value problems for partial differential equations of fractional order, including loaded parabolic equations; they are also relevant for mathematical modeling of various processes and systems with distributed parameters and fractal structures.

Keywords: boundary value problems, parabolic equations, fractional integro-differentiation operator, loaded equation, regular solution

Submitted 10.10.2025, approved after reviewing 12.11.2025, accepted for publication 02.12.2025

For citation. Karmokov M.M., Kerefov M.A., Gekkieva S.Kh. Mixed boundary value problem for one discontinuously loaded parabolic equation. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS.* 2025. Vol. 27. No. 6. Pp. 13–23. DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-6-13-23

Введение

Исследование дифференциальных уравнений, лежащих в основе математических моделей физико-биологических фрактальных процессов и связанных с ними задач, приводит к качественно новому классу дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, получивших название нагруженных уравнений, представляющих большой теоретический и практический интерес.

В монографии А. М. Нахушева [1] приведена подробная библиография по нагруженным уравнениям, в том числе по различным применениям нагруженных уравнений: как метод исследования задач математической биологии, математической физики, математического моделирования нелокальных процессов и явлений, механики сплошных сред с памятью.

Представленная работа посвящена исследованию смешанной краевой задачи для разрывно-нагруженного параболического уравнения с дробной производной.

В области $D = \{(x,t): X_1(t) < x < X_2(t), 0 < t < T\}$ рассматривается уравнение

$$L_1 u = \begin{cases} \lambda_1 u_x(x_0,t), \ 0 < t \le T_1, \\ \lambda_2 D_{0t}^{\alpha} u(X_1(t),t), \ T_1 < t < T, \end{cases} \tag{1}$$

где $L_1 u = u_t - a^2 u_{xx}$, $\lambda_i \ (i = 1, 2)$ – известные постоянные, $X_1(t) < x_0 < X_2(t)$, D_{0t}^{α} – оператор дробного интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля порядка α [2], $0 < \alpha < 1$.

Уравнение (1) относится к классу уравнений, предложенных в [3]. В работе [4] методом функции Грина исследована смешанная краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности. Краевые задачи для уравнений в частных производных дробного порядка, включая диффузионно-волновые уравнения, рассмотрены в монографии [5]. Краевые задачи для нагруженных и разрывно-нагруженных параболических уравнений исследованы в последние годы в работах [6–8].

Нелокальные краевые задачи для линейных параболических уравнений рассматривались также в работах [9, 10].

В работах [11, 12] получены решения краевых задач для нагруженного диффузионно-волнового уравнения с дробной производной, а также изучена краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной в полубесконечной области.

Среди более поздних работ отметим также [13], в которой доказана однозначная разрешимость в пространстве Соболева нелокальной задачи с интегральными условиями для параболического уравнения, а также работы [14, 15], посвященные исследованию разрешимости нелинейных обратных задач для параболических уравнений, в том числе вырождающихся.

Цель настоящего исследования – доказательство однозначной разрешимости смешанной краевой задачи для разрывно-нагруженного параболического уравнения с дробной производной Римана – Лиувилля.

Смешанная краевая задача

Пусть

$$D_1 = \{(x,t): X_1(t) < x < X_2(t), 0 < t < T_1\},$$
$$D_2 = \{(x,t): X_1(t) < x < X_2(t), T_1 < t < T\}.$$

Задача 1. *Найти регулярное в D_1 и D_2 решение $u(x,t)$ уравнения* (1) *из класса $\mathbb{C}(\overline{D})$, удовлетворяющее условиям*

$$u(x,0) = \varphi(x),\ X_1(0) < x < X_2(0),$$
$$u_x(X_1(t),t) = v_1(t),\ u(X_2(t),t) = v_2(t), \tag{2}$$

где $\sqrt{t}X_i(t) \in \mathbb{C}[0,t]$, $X_i(t) \in \mathbb{C}^1(0,t)$, $i = 1, 2$, причем

$$\varphi(x) \in \mathbb{C}^1[X_1(0), X_2(0)],\ \ v_i(t) \in \mathbb{C}^1[0,t],\ i = 1,2,$$
$$v_1(0) = \varphi'(X_1(0)),\ \ v_2(0) = \varphi(X_2(0)). \tag{3}$$

Введем обозначения:

$$u_x(X_2(t),t) = f(t), \quad \lim_{x\to X_1(t)} u(x,t) = g(t),$$

$$u_x(x_0(t),t) = w(t), \quad \lim_{t\to T_1} u(x,t) = \psi(x),$$

$$G_1(x,t;\xi,\eta) = \left(2\sqrt{\pi a(t-\tau)}\right)^{-1}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a(t-\tau)}}\right),$$

$$G_2(x,t;\xi,\eta) = \left(2\sqrt{\pi a(t-\tau)}\right)^{-1}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a(t-\tau)}}\right)$$

– функции Грина первой и второй краевых задач уравнения теплопроводности для полупрямой $x > 0$ соответственно.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Задача* (1), (2) *при условиях* (3) *разрешима и притом единственным образом.*

Доказательство. Пусть функция $u(x,t)$ равномерно ограничена в D_1, непрерывна в $\overline{D_1}$ вместе с u_x, за исключением, быть может, точек $(X_i(0),0)$, $i = 1,2$, и удовлетворяет в D_1 уравнению (1) при $0 < t < T_1$. В силу свойств функции $X_i(t)$, $i = 1,2$ для $u(x,t)$ имеем следующее интегральное представление:

$$u(x,t) = \int_0^t \Big\{[a^2 f(\tau) + V_2(\tau)X_2(\tau)]G_2(x,t;X_2(\tau),\tau)$$
$$- a^2\left[V_2(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}G_2(x,t;X_2(\tau),\tau) - g(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}G_2(x,t;X_2(\tau),\tau)\right]\Big\}d\tau \tag{4}$$
$$+ \int_{X_1(0)}^{X_2(0)} \varphi(\xi)\, G_2(x,t;\xi,0)d\xi \ + \lambda_1\int_0^t w(\tau)\,d\tau \int_{X_1(\tau)}^{X_2(\tau)} G_2(x,t;\xi,\tau)\,d\xi.$$

Дифференцируя (4) по x и учитывая, что $\frac{\partial G_1}{\partial x} = -\frac{\partial G_2}{\partial \xi}, \frac{\partial G_1}{\partial \xi} = -\frac{\partial G_2}{\partial x}$, получим

$$u_x(x,t) = \int\limits_{X_1(0)}^{X_2(0)} \varphi'(\xi)\, G_1(x,t;\xi,0)d\xi + \lambda_1 \int\limits_0^t w(\tau)\, d\tau \int\limits_{X_1(\tau)}^{X_2(\tau)} G_1(x,t;\xi,\tau)\, d\xi$$

$$+ \int\limits_0^t [g'(\tau)G_1(x,t;X_1(\tau),\tau) - a^2 V_1(\tau)\frac{\partial}{\partial \xi}G_1(x,t;X_1(\tau),\tau) - V_2'(\tau)G_1(x,t;X_2(\tau),\tau) \quad (5)$$

$$+a^2 f(\tau)\frac{\partial}{\partial \xi}G_1(x,t;X_2(\tau),\tau)]d\tau.$$

Пользуясь теоремой о разрывах теплового потенциала двойного слоя [16], находим

$$\lim_{x\to X_2(t)-0}\left(-a^2\int\limits_0^t f(\tau)\frac{\partial}{\partial \xi}G_1(x,t;X_2(\tau),\tau)\, d\tau\right) = \frac{1}{2}f(t)$$

$$- a^2 \int\limits_0^t f(\tau)\frac{\partial}{\partial \xi}G_1(X_2(t),t;X_2(\tau),\tau)\, d\tau. \quad (6)$$

Следовательно, имеем

$$f(t) = 2\Bigg\{\big[g(0) - \varphi\big(X_1(0)\big)\big]G_1(X_2(t),t;X_1(0),0) + \int\limits_{X_1(0)}^{X_2(0)} \varphi'(\xi)\, G_1(x,t;\xi,0)d\xi$$

$$- \int\limits_0^t g'(\tau)G_1(X_2(t),t;X_1(\tau),\tau)d\tau - a^2\int\limits_0^t f(t)\frac{\partial}{\partial \xi}G_1(X_2(t),t;X_1(\tau),\tau)d\tau \quad (7)$$

$$- \lambda_1 \int\limits_0^t w(\tau)\, d\tau \int\limits_{X_1(\tau)}^{X_2(\tau)} \frac{\partial}{\partial \xi}G_1(X_2(t),t;\xi,\tau)\, d\xi\Bigg\}.$$

Переходя к пределу в (4) при $x \to X_2(t) + 0$ для функции $g(t)$, получим

$$g(t) =$$

$$= 2\int\limits_0^t \Big\{-[a^2 V_1(\tau) + g(\tau)X_1'(\tau)]G_2(X_1(t),t;X_1(\tau),\tau) - a^2 g(\tau)\frac{\partial}{\partial \xi}G_2(X_1(t),t;X_1(\tau),\tau)$$

$$+ [a^2 f(\tau)V_2(\tau)X_2'(\tau)]G_2(X_1(t),t;X_2(\tau),\tau) - a^2 V_2(\tau)\frac{\partial}{\partial \xi}G_2(X_1(t),t;X_2(\tau),\tau)\Big\}d\tau \quad (8)$$

$$+ \int\limits_{X_1(0)}^{X_2(0)} \varphi(\xi)\, G_2(X_1(t),t;\xi,0)d\xi + \lambda_1\int\limits_0^t w(\tau)\, d\tau \int\limits_{X_1(\tau)}^{X_2(\tau)} G_2(X_1(t),t;\xi,\tau)\, d\xi.$$

Наконец, при $x \to x_0$ из (4) для функции $w(t)$ имеем

$$w(t) = \int\limits_{X_1(0)}^{X_2(0)} \varphi'(\xi)\, G_1(x_0,t;\xi,0)d\xi + \lambda_1\int\limits_0^t w(\tau)\, d\tau \int\limits_{X_1(\tau)}^{X_2(\tau)} G_1(x_0,t;\xi,\tau)\, d\xi +$$

$$+\int\limits_0^t \Big[g'(\tau)G_1(x_0,t;X_1(\tau),\tau)-a^2V_1(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}G_1(x_0,t;X_1(\tau),\tau)-V_2'(\tau)G_1(x_0,t;X_2(\tau),\tau)d\tau \qquad (9)$$

$$+a^2f(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}G_1(x_0,t;X_2(\tau),\tau)\Big]d\tau.$$

Система (7)–(9) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Из свойств функции Грина, а также условия (3) заключаем, что эта система имеет единственное решение в классе непрерывных функций.

Покажем теперь, что $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению L_1u=0 и начальному условию (2).

Пользуясь равенством

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\int\limits_\alpha^\beta \varphi(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi=\begin{cases}0, & x\overline{\in}[\alpha,\beta],\\ \dfrac{1}{2}\varphi(x), & x=\alpha \text{ или } x=\beta,\\ \varphi(x), & x\in(\alpha,\beta),\end{cases} \qquad (10)$$

выполняющимся для любой непрерывной функции $\varphi(x)$, находим, что

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x\to X_2(t)}} u(x,t)=\frac{1}{2}V_2(0)+\frac{1}{2}\,\varphi\big(X_2(0)\big).$$

Из $V_2(0)=\varphi\big(X_2(0)\big)$ и (10) следует, что $u(x,t)$ непрерывна в точке $\big(X_2(0)\big)$. Следовательно, u непрерывна в $\overline{D}_1$. Из способа построения (4) ясно, что

$$\lim_{x\to X_2(t)} u_x(x,t)=\frac{1}{2}f(t)+A(X_2(t),t), \qquad (11)$$

где A – правая часть (4). Сопоставляя теперь (11) и (5), имеем, что

$$\lim_{x\to X_2(t)} u_x(x,t)=f(t).$$

Аналогично

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x\to X_2(t)}} u_x(x,t)=\varphi'\big(X_2(0)\big),\qquad \lim_{\substack{t\to 0\\ x\to X_1(t)}} u_x(x,t)=\varphi'\big(X_1(0)\big).$$

Далее, так как

$$f_1(0)=\varphi'\big(X_1(0)\big),$$

то

$$\lim_{x\to X_1(t)} u_x(x,t)=\frac{1}{2}f_1(t)+A(X_1(t),t). \qquad (12)$$

Отсюда при $t\to 0$:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x\to X_1(t)}} u_x(x,t)=\frac{1}{2}f_1(0)+\frac{1}{2}\varphi'\big(X_1(0)\big),$$

а это в силу (12) означает, что

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x\to X_1(t)}} u_x(x,t)=\varphi'\big(X_1(0)\big).$$

Аналогично

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x\to X_2(t)}} u_x(x,t)=\varphi'\big(X_2(0)\big).$$

Покажем выполнимость условий (3). Из непрерывности $u(x,t)$ и $u_x(x,t)$ следует применимость к $u(x,t)$ интегрального представления (4).

Положим

$$\lim_{x\to X_1(t)+0} u_x(x,t)=V_1^0(t),\quad \lim_{x\to X_1(t)-0} u(x,t)=V_2^0(t).$$

Тогда получим

$$u(x,t)=\int_0^t [a^2 f(\tau)+V_2^0(\tau)X_2'(\tau)]G_2(x,t;X_2(\tau),\tau)d\tau$$

$$-\int_0^t [a^2V_1^0(\tau)+g(\tau)X_1'(\tau)]\,G_2(x,t;X_1(\tau),\tau)d\tau-a^2\int_0^t V_2^0(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}G_2(x,t;X_2(\tau),\tau)d\tau$$

$$+a^2\int_0^t g(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}G_2(x,t;X_1(\tau),\tau)d\tau+\int_{X_1(0)}^{X_2(0)}\varphi(\xi)\,G_2(x,t;\xi,0)d\xi \tag{13}$$

$$+\lambda_1\int_0^t w(\tau)\,d\tau\int_{X_1(\tau)}^{X_2(\tau)}G_2(x,t;\xi,\tau)\,d\tau.$$

Положим

$$z_1(t)=\ V_1(t)-V_1^0(t),\quad z_2(t)=\ V_2(t)-V_2^0(t).$$

Вычитая (13) из (5), получим

$$0=\int_0^t\left\{z_2(\tau)\left[X_2'(\tau)-a^2\frac{\partial}{\partial\xi}\right]G_2(x,t;X_2(\tau),\tau)-a^2z_1(\tau)G_2(x,t;X_1(\tau),\tau)\right\}d\tau. \tag{14}$$

При $x\to X_2(t)-0$, пользуясь (6), найдем

$$z_2(t)=2\int_0^t\{a^2z_1(\tau)G_2(X_2(t),t;X_1(\tau),\tau)$$

$$+z_2(\tau)\left[X_2'(\tau)+a^2\frac{\partial}{\partial\xi}\right]G_2(X_2(t),t;X_2(\tau),\tau)\}\,d\tau. \tag{15}$$

Далее, дифференцируя (14) по x и переходя к пределу при $x\to X_1(t)+0$, аналогично получим

$$z_1(t)=-2\int_0^t\left\{a^2z_1(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}G_1(X_1(t),t;X_1(\tau),\tau)+z_2(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}G_1(X_1(t),t;X_2(\tau),\tau)\right\}d\tau. \tag{16}$$

Так как $x_2-x_1\neq 0$, то второе слагаемое в (16) – ограниченное. Следовательно, система (15), (16) является однородной системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Таким образом, $z_1 \equiv z_2 \equiv 0$, что и требовалось доказать. Из единственности решения системы интегральных уравнений (7)–(9) следует единственность решения исходной задачи.

В области D_2 мы имеем следующее интегральное представление:

$$u(x,t) = \int_{T_1}^{t} \Big\{ [a^2 f(\tau) + V_2(\tau) X_2(\tau)] G_2(x,t;X_2(\tau),\tau)$$
$$- a^2 \left[V_2(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G_2(x,t;X_2(\tau),\tau) - g(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G_2(x,t;X_1(\tau),\tau) \right] \Big\} d\tau$$
$$+ \int_{X_1(T_1)}^{X_2(T_1)} u(\xi,T_1)\, G_2(x,t;\xi,T_1) d\xi \tag{17}$$
$$+\lambda_1 \int_{T_1}^{t} D_{0\tau}^{\alpha} u(X_1(\tau),\tau)\, d\tau \int_{X_1(\tau)}^{X_2(\tau)} G_2(x,t;\xi,\tau)\, d\xi.$$

Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \lambda_1 \int_{T_1}^{t} D_{0\tau}^{\alpha} u(X_1(\tau),\tau)\, G_2(x,t;\xi,\tau) d\tau.$$

При $\alpha < 0$

$$I_1 = \frac{\lambda_1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{T_1}^{t} (t-\tau_1)^{-\alpha_j - 1} u(X_1(\tau),\tau)\, d\tau_1 \int_{t}^{\tau} G_2^0\,(x,t;\xi,\tau)(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\, d\tau$$
$$= \frac{\lambda_1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{T_1}^{t} u(X_1(\tau_1),\tau_1)(t-\tau_2)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\, d\tau_1 \int_{0}^{1} G_2^0\,(x,t;\xi,\tau_1 d\tau$$
$$+ (t-\tau_1)y)\, y^{-1-\alpha}(1-y)^{-\frac{1}{2}}\, dy,$$

а при $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

$$I_1 = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{T_1}^{t} u(X_1(\tau_1),\tau_1)\, d\tau_1 \frac{d}{d\tau_1} (t-\tau_1)^{\frac{1}{2}-\alpha} \int_{0}^{1} G_2^0\,(x,t;\xi,\tau_1 + (t-\tau_1)y) y^{-\alpha}(1-y)^{-\frac{1}{2}}\, dy,$$

где

$$G_2^0(x,t;\xi,\tau_1) = (t-\tau_1)^{\frac{1}{2}} G_2(x,t;\xi,\tau).$$

При $x \to X_1(t)$ из (17) имеем

$$u(X_1(t),t) = \int_{T_1}^{t} \frac{K(t,\tau) u(X_1(\tau),\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1/2}} d\tau + F(t), \tag{18}$$

где

$$F(t) = \int\limits_{T_1}^{t} \Big\{ [a^2 f(\tau) + V_2(\tau) X_2(\tau)] G_2(X_1(t), t; X_2(\tau), \tau)$$

$$- a^2 \left[V_2(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G_2(x, X_1(t); X_2(\tau), \tau) - g(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G_2(X_1(t), t; X_1(\tau), \tau) \right] \Big\} d\tau$$

$$+ \int\limits_{X_1(T_1)}^{X_2(T_1)} u(\xi, T_1)\, G_2(X_1(t), t; \xi, T_1) d\xi,$$

при $\alpha < 0$

$$K(t, \tau) = \frac{\lambda_1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^1 \int\limits_{X_1(\tau)}^{X_2(\tau)} G_2^0(X_1(t), t; \xi, \tau_1 + (t - \tau_1) y) y^{-1-\alpha} (1 - y)^{-\frac{1}{2}}\, d\xi\, dy,$$

при $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

$$K(t, \tau) = \frac{\lambda_1 (t - \tau)^{\alpha + 1/2}}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{d\tau} (t - \tau)^{\frac{1}{2} - \alpha} \int\limits_0^1 G_2^0\, (x, t; \xi, \tau + (t - \tau) y) d\xi.$$

Пользуясь (18), а также соотношениями (7), (8) для определения $f(t)$ и $g(t)$ в области D_2, получим единственное решение поставленной задачи в области D_2.

Заключение

Таким образом, в данной работе доказана однозначная разрешимость смешанной краевой задачи для нагруженного параболического уравнения дробного порядка. Полученные результаты важны для развития теории краевых задач для уравнений в частных производных дробного порядка, в том числе нагруженных уравнений параболического типа, а также математического моделирования различных процессов и систем с распределенными параметрами, имеющих фрактальную пространственно-временную структуру.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с. EDN: RPBPQZ

2. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с. EDN: UGLEPD

3. *Нахушев А. М.* О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 1. С. 103–108. EDN: PDBUJB

4. *Дикинов Х. Б., Керефов А. А., Нахушев А. М.* Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 1. С. 177–179. EDN: PBDAVT

5. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с. EDN: QJPLZX

6. *Кармоков М. М., Нахушева Ф. М., Абрегов М. Х.* Краевая задача для нагруженного параболического уравнения дробного порядка // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2024. № 1(117). С. 69–77. DOI: 10.35330/1991-6639-2024-26-1-69-77

7. *Кармоков М. М., Нахушева Ф. М., Геккиева С. Х.* Краевые задачи для разрывно-нагруженных параболических уравнений // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2024. Т. 30. № 4. С. 7–17. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-7-17

8. *Геккиева С. Х., Керефов М. А.* Смешанные краевые задачи для нагруженного уравнения с дробной производной // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: материалы III Международной конференции. Нальчик, 2006. С. 80–82. EDN: QKREBL

9. *Кожанов А. И.* Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений // Сибирский журнал индустриальной математики. 2004. Т. 7. № 1(17). С. 51–60. EDN: HZOGQL

10. *Кожанов А. И.* О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2004. № 30. С. 63–69. EDN: HKZXBD

11. *Геккиева С. Х.* Смешанные краевые задачи для нагруженного диффузионно-волнового уравнения // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2016. № 6(227). С. 32–35. EDN: VUUBKR

12. *Геккиева С. Х.* Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной в полубесконечной области // Современные методы в теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XIII». Воронеж, ВГУ, 2002. С. 37. EDN: VNGVYT

13. *Бейлин А. Б., Богатов А. В., Пулькина Л. С.* Задача с нелокальными условиями для одномерного параболического уравнения // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2022. Т. 26. № 2. С. 380–395. DOI: 10.14498/vsgtu1904

14. *Кожанов А. И., Ашурова Г. Р.* Параболические уравнения с вырождением и неизвестным коэффициентом // Математические заметки СВФУ. 2024. Т. 31. № 1. С. 56–69. DOI: 10.25587/2411-9326-2024-1-56-69

15. *Богатов А. В., Пулькина Л. С.* Разрешимость обратной коэффициентной задачи с интегральным переопределением для одномерного параболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2022. Т. 28. № 3-4. С. 7–17. DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-7-17

16. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 427 с.

REFERENCES

1. Nakhushev A.M. *Nagruzhennye uravneniya i ih primenenie* [Loaded equations and their application]. Moscow: Nauka, 2012. 232 p. EDN: RPBPQZ. (In Russian)

2. Nakhushev A.M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional calculus and its applications]. Moscow: Fizmatlit, 2003. 272 p. EDN: UGLEPD. (In Russian)

3. Nakhushev A.M. On the Darboux problem for a degenerate loaded second-order integro-differential equation. *Differential Equations*. 1976. Vol. 12. No. 1. Pp. 103–108. EDN: PDBUJB. (In Russian)

4. Dikinov Kh.B., Kerefov A.A., Nakhushev A.M. On a boundary value problem for a loaded heat conduction equation. *Differential Equations*. 1976. Vol. 12. No. 1. Pp. 177–179. EDN: PBDAVT. (In Russian)

5. Pskhu A.V. *Uravneniya v chastnyh proizvodnyh drobnogo poryadka* [Fractional-order partial differential equations]. Moscow: Nauka, 2005. 199 p. EDN: QJPLZX. (In Russian)

6. Karmokov M.M., Nakhusheva F.M., Abregov M.Kh. Boundary value problem for loaded parabolic equations of fractional order. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS*. 2024. Vol. 26. No. 1. Pp. 69–77. DOI: 10.35330/1991-6639-2024-26-1-69-77. (In Russian)

7. Karmokov M.M., Nakhusheva F.M., Gekkieva S.Kh. Boundary value problems for discontinuously loaded parabolic equations. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*. 2024. Vol. 30. No. 4. Pp. 7–17. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-7-17. (In Russian)

8. Gekkieva S.Kh., Kerefov M.A. Mixed boundary value problems for a loaded equation with a fractional derivative. *Nelokal'nye kraevye zadachi i rodstvennye problemy matematicheskoy biologii, informatiki i fiziki: materialy III Mezhdunarodnoy konferencii* [Nonlocal boundary value problems and related problems in Mathematical Biology, Computer Science, and Physics: materials of the III International Conference]. Nalchik, 2006. EDN: QKREBL. (In Russian)

9. Kozhanov A.I. A non-local in time boundary value problem for linear parabolic equations. *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki*. 2004. Vol. 7. No. 1(17). Pp. 51–60. EDN: HZOGQL. (In Russian)

10. Kozhanov A.I. On the solvability of an edge problem with a non-local boundary condition for linear parabolic equations. *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2004. No. 30. Pp. 63–69. EDN: HKZXBD. (In Russian)

11. Gekkieva S.Kh. Mixed boundary value problems for a loaded diffusion-wave equation. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika* [Scientific Bulletin of Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics]. 2016. No. 6(227). Pp. 32–35. EDN: VUUBKR. (In Russian)

12. Gekkieva S.Kh. Boundary value problem for a generalized transport equation with a fractional derivative in a semi-infinite domain. *Sovremennye metody v teorii kraevyh zadach. Materialy Voronezhskoy vesenney matematicheskoy shkoly "Pontryaginskie chteniya-XIII"* [Modern methods in the theory of boundary value problems. Proceedings of the Voronezh Spring Mathematical School "Pontryagin Readings-XIII"]. Voronezh: VGU, 2002. P. 37. EDN: VNGVYT. (In Russian)

13. Beilin A.B., Bogatov A.V., Pulkina L.S. A problem with non-local conditions for a one-dimensional parabolic equation. *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 26. No. Pp. 380–395. DOI: 10.14498/vsgtu1904. (In Russian)

14. Kozhanov A.I., Ashurova G.R. Parabolic equations with degeneracy and unknown coefficient. *Mathematical Notes of NEFU*. 2024. Vol. 31. No. 1. Pp. 56–69. DOI: 10.25587/2411-9326-2024-1-56-69. (In Russian)

15. Bogatov A.V., Pulkina L.S. Solvability of the inverse coefficient problem with integral redefinition for a one-dimensional parabolic equation. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*. 2022. Vol. 28, No. 3-4. Pp. 7–17. DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-7-17. (In Russian)

16. Fridman A. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa* [Parabolic partial differential equations]. Moscow: Mir, 1968. 427 p. (In Russian)

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflict of interest.

Финансирование. Исследование проведено без спонсорской поддержки.

Funding. The study was performed without external funding.

Информация об авторах

Кармоков Мухамед Мацевич, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х. М. Бербекова;

360004, Россия, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173;

mkarmokov@yandex.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5189-6538, SPIN-код: 1771-6984

Керефов Марат Асланбиевич, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х. М. Бербекова;

360004, Россия, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173;

kerefov@mail.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7442-5402, SPIN-код: 1424-6720

Геккиева Сакинат Хасановна, канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. отдела вычислительных методов, Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук;

360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А;

gekkieva_s@mail.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2135-2115, SPIN-код: 6711-3471

Information about the authors

Mukhamed M. Karmokov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov;

173, Chernyshevsky street, Nalchik, 360004, Russia;

mkarmokov@yandex.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5189-6538, SPIN-code: 1771-6984

Marat A. Kerefov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov;

173, Chernyshevsky street, Nalchik, 360004, Russia;

kerefov@mail.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7442-5402, SPIN-code: 1424-6720

Sakinat Kh. Gekkieva, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Department of Computational Methods, Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences;

89 A, Shortanov street, Nalchik, 360000, Russia;

gekkieva_s@mail.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2135-2115, SPIN-code: 6711-3471