

===== КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ =====

УДК 51-7;514.8;626-3;627.8.06

Научная статья

DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-4-55-69

EDN: CRCETV

Моделирование устойчивости откоса по различным кривым скольжения

К. Н. Анахаев^{✉1,2}, А. С. Бестужева³, В. В. Беликов²,
А. Б. Балкизов⁴, М. О. Мамчуев¹

¹Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук
360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

²Институт водных проблем Российской академии наук
119333, Россия, Москва, ул. Губкина, 3

³Институт гидротехнического и энергетического строительства,
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет
129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, 26, корп. УЛБ

⁴Кабардино-Балкарский государственный аграрный университет имени В. М. Кокова
360030, Россия, г. Нальчик, пр-т Ленина, 1в

Аннотация. Оползневые явления с потерей устойчивости грунтовых склонов возникают как на естественных природных ландшафтах, так и при проведении земляных работ с нарушением устойчивости сложившихся горных пород, в том числе при сооружении и эксплуатации грунтовых плотин и оградительных дамб, авто- и железнодорожных насыпей и др. Устойчивость откосов зависит от множества факторов, наиболее важными из которых являются физико-механические характеристики грунта, которые могут быть как однородными по всему массиву, так и неоднородными в виде различных слоев и т.д.

Цель исследования – расширение возможностей комплексной оценки устойчивости откоса за счет рассмотрения дополнительных (к круговому) семейств гиперболических кривых скольжения для случая основания с иными прочностными характеристиками.

Методы. Используются методы определения очертаний кривых скольжения оползневого откоса с наименьшим запасом устойчивости на основе сопоставления расчетных результатов семейств круговых, нижне-гиперболических и верхне-гиперболических кривых. Расчеты ведутся по методу Терцаги путем разбиения предполагаемой области оползания грунтового массива на вертикальные отсеки с определением для них локальныхдерживающих и сдвигающих сил с итоговым результатом в виде отношений суммарных значений последних.

Результаты. Предложена комплексная методика определения очертаний наиболее опасных кривых скольжения грунтовых массивов на основе метода Терцаги с рассмотрением семейств круговых и гиперболических (с низовой и верховой кривизной) линий скольжения. Полученные результаты, протестированные для грунтового откоса при заданных двух точках на линии скольжения, показали: адекватность предложенного аналитического решения для круговых кривых ($\sim 2\%$) в сравнении с результатами численного расчета по программе «OTKOC-22»; линией наименьшей устойчивости для рассматриваемого случая является нижне-гиперболическая кривая скольжения с коэффициентом устойчивости, на 11 % меньшим устойчивости откоса по круговой кривой скольжения; коэффициенты устойчивости откосов с относительно небольшими различиями линий скольжения могут существенно различаться, в рассмотренном случае коэффициенты устойчивости для откосов с достаточно близкими гиперболическими очертаниями низовой и верховой кривизны разнятся более чем на 19 %.

Выводы. Предложенная комплексная методика определения очертаний наиболее опасных кривых скольжения грунтовых массивов на основе метода Терзаги с рассмотрением семейств круговых и гиперболических (с низовой и верховой кривизной) линий скольжения значительно расширяет области поиска линий наименьшей устойчивости откосов.

Ключевые слова: устойчивость откоса, коэффициент устойчивости, кривая скольжения, гиперболическая кривая, оползневой массив

Поступила 16.06.2025, одобрена после рецензирования 26.06.2025, принята к публикации 18.07.2025

Для цитирования. Анахаев К. Н., Бестужева А. С., Беликов В. В., Балкизов А. Б., Мамчуков М. О. Моделирование устойчивости откоса по различным кривым скольжения // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2025. Т. 27. № 4. С. 55–69. DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-4-55-69

MSC: 70-10

Original article

Modeling slope stability according to various sliding curves

K.N. Anakhaev^{✉1, 2}, A.S. Bestuzheva³, V.V. Belikov²
A.B. Balkizov⁴, M.O. Mamchuev¹

¹Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street

²Institute of Water Problems of the Russian Academy of Sciences
119333, Russia, Moscow, 3 Gubkin street

³Institute of Hydraulic Engineering and Energy Construction of the Moscow State University of Civil Engineering (National Research University)
129337, Russia, Moscow, 26 Yaroslavskoye highway, building ULB

⁴Kabardino-Balkarian State Agrarian University named after V.M. Kokov
360030, Russia, Nalchik, 1v Lenin avenue

Abstract. Landslide phenomena with loss of stability of soil slopes occur both in natural landscapes and during excavation operations with a violation of the stability of folded rocks, including during the construction and operation of soil dams and fencing dams, automobile and railway embankments, etc. The stability of slopes depends on a variety of factors, the most important of which are the physical and mechanical characteristics of the soil, which can be either homogeneous throughout the massif, or heterogeneous in the form of various layers, etc.

Aim. Expanding the possibilities of a comprehensive assessment of slope stability by considering additional (to the circular) families of hyperbolic sliding curves for the case of a base with different strength characteristics.

Methods. Methods are used to determine the outlines of the sliding curves of a landslide slope with the least margin of stability, based on a comparison of the calculated results of families of circular, lower-hyperbolic, and upper-hyperbolic curves. The calculations are performed using the Terzaghi method by dividing the proposed area of soil mass slide into vertical sections and determining the local holding and shearing forces for each section. The final result is the ratio of the total values of these forces.

Results. A comprehensive method for determining the outlines of the most dangerous sliding curves of soil massifs based on the Terzaghi method is proposed, considering families of circular and hyperbolic (with low and high curvature) sliding lines. The results obtained, tested for the ground slope at the specified two points on the sliding line, showed: adequacy of the proposed analytical solution for circular curves (~ 2 %) in comparison with the results of numerical calculation according to the OTKOS-22 program; the line of least stability for the case under consideration is the lower hyperbolic sliding curve with a stability coefficient 11% less than the slope stability along the circular sliding curve; the stability coefficients of slopes with relatively small differences in sliding lines can vary significantly; in the considered case, the

stability coefficients for slopes with sufficiently close hyperbolic outlines of the lower and upper curvature differ by more than 19 %.

Conclusions. A comprehensive method for determining the outlines of the most dangerous sliding curves of soil massifs based on the Terzaghi method is proposed, considering families of circular and hyperbolic (with low and high curvature) sliding lines, which significantly expands the search area for lines of least slope stability.

Keywords: slope stability, two-layer slope, stability coefficient, sliding curve, collapse area

Submitted 16.06.2025, approved after reviewing 26.06.2025, accepted for publication 18.07.2025

For citation. Anakhaev K.N., Bestuzheva A.S., Belikov V.V. Balkizov A.B., Mamchuev M.O. Modeling slope stability according to various sliding curves. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS*. 2025. Vol. 27. No. 4. Pp. 55–69. DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-4-55-69

ВВЕДЕНИЕ

Оползневые явления с потерей устойчивости грунтовых склонов возникают как на естественных природных ландшафтах в результате неблагоприятного сочетания геоморфологических, гидрогеологических и климатических факторов, техногенного воздействия, так и при проведении земляных работ с нарушением устойчивости сложившихся горных пород. Оползания же искусственно созданных грунтовых откосов происходят чаще всего при сооружении и эксплуатации грунтовых плотин и оградительных дамб, авто- и железнодорожных насыпей, отвалов горных пород и карьеров грунтовых материалов. Устойчивость последних зависит от множества факторов, в числе которых наиболее важными являются физико-механические характеристики грунта в рассматриваемом массиве, которые могут быть как однородными по всему массиву, так и представлять собой неоднородную среду в виде слоев с различными свойствами и т.д.

Основной причиной сдвиговых деформаций и сопровождающих их оползневых процессов является гравитационный фактор (вес грунтового массива G), под воздействием которого происходит оползание склона вдоль поверхности обрушения – кривой скольжения, при условиях формирования вдоль них сдвиговой касательной (тангенциальной) составляющей T гравитационной силы, превосходящей возникающие здесь силы трения S и сцепления C . Как показал мировой опыт натурных и экспериментальных научных исследований, кривые скольжения для большинства случаев оползаний однородных грунтовых массивов имеют очертание профиля, близкое к круговому. Однако в зависимости от инженерно-геологических факторов и неоднородности грунтового массива кривые скольжения могут иметь другие очертания – прямые, наклонно-ломанные, логарифмические и др. Поэтому для расчетного обоснования устойчивости откоса важное значение имеет правильное принятие предполагаемого наиболее опасного очертания кривой скольжения – ведь даже небольшие смещения последних ($\sim 1\text{--}3\%$) существенно отражаются на общей устойчивости ($\sim 20\%$) рассматриваемого грунтового массива [1–3], что имеет важное значение для достоверной расчетной оценки устойчивости откоса.

Цель исследования – расширение возможностей комплексной оценки устойчивости откоса за счет рассмотрения дополнительных (к круговому) семейств гиперболических кривых скольжения для случая основания с иными прочностными характеристиками.

МАТЕРИАЛЫ, МЕТОДЫ И ОБЪЕМ ИССЛЕДОВАНИЯ

Данное исследование проводится на примере расчетной схемы исходной задачи (рис. 1), заимствованной из [4, рис. 135, с. 183], со следующими характеристиками грунтового откоса и его основания: $H = 6$ м – высота откоса; $m = 2,5$ – коэффициент заложения откоса;

$\gamma_1 = 1,72 \text{ т/м}^3$, $C_1 = 0,3 \text{ т/м}^2$, $\varphi_1 = 20^\circ$ и $\gamma_2 = 1,87 \text{ т/м}^3$, $C_2 = 1,0 \text{ т/м}^2$, $\varphi_2 = 18^\circ$ – плотность, удельное сцепление и угол внутреннего трения соответственно для грунтов откоса и его основания; $A(x_A = 20, 0; y_A = 6, 0)$, $O(0, 0)$ – заданные координаты начала и конца кривой скольжения, причем последняя является также центром координат xOy ; $B(x_B = 17, 0; y_B = 6, 0)$, $E(x_E = 2, 0; y_E = 0)$ – координаты бровки откоса и его основания.

Таким образом, рассматривается расчетная схема устойчивости при разнородных грунтах откоса и его основания с кривыми скольжения, проходящими через точки A и O . При этом искомая кривая с наименьшим запасом устойчивости будет определена на основе со-поставления расчетных результатов трех семейств кривых скольжения – круговых, нижне-гиперболических, верхне-гиперболических. Расчеты ведутся на основе метода Терцаги путем разбиения предполагаемой области оползания грунтового массива на вертикальные отсеки с определением для каждого n -го отсека по линии его подошвы величин: силы тяжести G_n с нормальным N_n и касательным (тангенциальным) T_n составляющими; сил сопротивления трению S_n и сцеплению C_n ; углов наклона линии скольжения к горизонту θ_n .

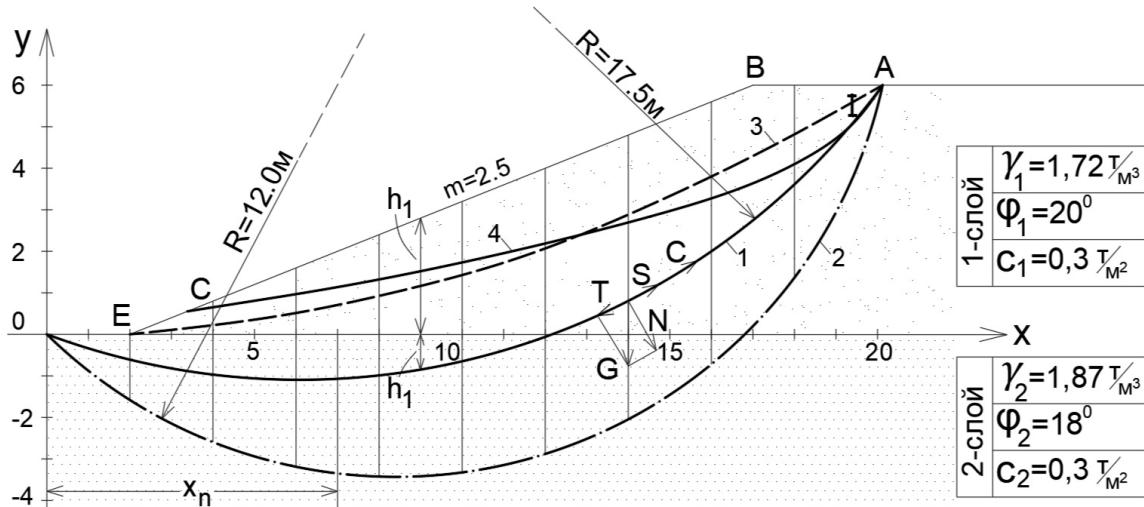


Рис. 1. Схема расчета устойчивости откоса по круговым и гиперболическим кривым скольжения при заданных значениях точек $A(x_A; y_A)$ и $O(0; 0)$ (авторский)

Fig. 1. Scheme for calculating slope stability based on circular and hyperbolic sliding curves at specified values of points $A(x_A; y_A)$ and $O(0; 0)$

Итоговое значение коэффициента устойчивости откоса по каждой рассматриваемой кривой скольжения K_{yctm} определяется соотношением (при отсутствии фильтрации и без учета сил взаимодействия отсеков)

$$K_{yctm} = \frac{\sum S_n + \sum C_n}{\sum T_n}, \quad (1)$$

в котором ширина b вертикальных отсеков принимается равной $b = x_A / k$ [5], где k – расчетное количество отсеков.

КРУГОВЫЕ КРИВЫЕ СКОЛЬЖЕНИЯ ОПОЛЗНЕВОГО МАССИВА

Расчет устойчивости оползневого массива при круговых кривых скольжения производится в соответствии с расчетной схемой, представленной на рисунке 1, в котором очертания круговых кривых описывается уравнениями (2) [2, 6]:

$$y = y_p - \sqrt{R^2 - (x + x_p)^2}, \quad (2)$$

где координаты x_p и y_p центра кривой скольжения, расположенной на нормали к середине линии OA , могут быть рассчитаны при заданных значениях точек $A(x_A; y_A)$; $O(0;0)$ и радиуса круга R по предлагаемым зависимостям:

$$x_p = 0,5(x_A - y_A \cdot \xi_p), \quad y_p = 0,5(y_A + x_A \cdot \xi_p), \quad (3)$$

в которых значение коэффициента ξ_p находится по формуле

$$\xi_p = \sqrt{\frac{4R^2}{x_A^2 + y_A^2} - 1}. \quad (4)$$

При этом значение радиуса R в формуле (4) должно быть не менее величины $R \geq R_{\min}$, определяемой по (5):

$$R_{\min} = \frac{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}}{2 \cos(\operatorname{arctg} \frac{y_A}{x_A})}. \quad (5)$$

В формуле (1) значения отдельных удерживающих (S_n , C_n) и сдвигающих (T_n) сил для каждого n -го вертикального отсека будут равны

$$S_n = N_n \operatorname{tg} \varphi_n; \quad N_n = G_n \cos \theta_n; \quad C_n = c_n l_n; \quad T_n = G_n \sin \theta_n, \quad (6)$$

в которых φ_n и c_n – заданные значения угла внутреннего трения и удельного сцепления грунта на линии подошвы отсека; θ_n – угол наклона к горизонту кривой скольжения в средней части отсека, равный

$$\theta_n = \arcsin \frac{x_n - x_p}{R} \quad (\text{значение } x_n \text{ см. ниже}). \quad (7)$$

Величина l_n – длина дуги скольжения по подошве n -го отсека – находится по формуле $l_n = l_{+n} - l_{-n}$, где l_{-n} и l_{+n} – длины круговой кривой от начала координат (точки О) до левой и правой граней n -го отсека, равные

$$\left. \begin{aligned} l_{-n} &= 2R \arcsin \frac{\sqrt{x_{-n}^2 + y_{-n}^2}}{2R}; \\ l_{+n} &= 2R \arcsin \frac{\sqrt{x_{+n}^2 + y_{+n}^2}}{2R}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

в которой

$$\left. \begin{array}{l} x_{-n} = (n-1)b; \quad y_{-n} = y_p - \sqrt{R^2 - (x_{-n} - x_p)^2}; \\ x_{+n} = nb; \quad y_{+n} = y_p - \sqrt{R^2 - (x_{+n} - x_p)^2}. \end{array} \right\} \quad (9)$$

Приводимая в формулах (6) сила тяжести вертикального отсека G_n определяется по зависимости

$$G_n = b(h_1\gamma_1 + h_2\gamma_2),$$

где γ_1 и γ_2 – заданные значения плотностей грунтов откоса и основания, а h_1 и h_2 – величины высот в рассматриваемом n -м отсеке соответственно грунтового откоса и его основания, равные:

$$\left. \begin{array}{l} h_1 = 0 \quad - \text{ при } x_n \leq x_E; \\ h_1 = \frac{x_n - x_E}{m} \quad - \text{ при } x_E < x_n \leq x_M; \\ h_1 = \frac{x_n - x_E}{m} - y_n \quad - \text{ при } x_M < x_n \leq x_B; \\ h_1 = H - y_n \quad - \text{ при } x_B < x_n \leq x_A; \\ \\ h_2 = y_n \quad - \text{ при } 0 < x_n \leq x_M; \\ h_2 = H - y_n \quad - \text{ при } x_M < x_n \leq x_A, \end{array} \right\} \quad (10)$$

в которых x_n и y_n – координаты точки пересечения осевой линии n -го отсека с кривой скольжения, подсчитываемые по зависимостям:

$$\left. \begin{array}{l} x_n = b(n-0,5); \\ y_n = y_p - \sqrt{R^2 - (x_n + x_p)^2}; \end{array} \right\} \quad (11)$$

x_M – абсцисса точки M пересечения круговой линии скольжения с линией основания, определяемая по зависимости

$$x_M = x_p + \sqrt{R^2 - y_p^2}.$$

Формулы (7)–(11) позволяют находить все геометрические параметры рассматриваемых вертикальных отсеков при круговых кривых скольжения.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

На рисунке 1 приводятся результаты для рассматриваемой расчетной схемы с заданными точками $A(x_A; y_A)$ и $O(0;0)$ на кривой скольжения, очертание которой, соответствующее наименьшей устойчивости $K_{y_{cm}} = 1,579$ (кривая 1), получено итерацией семейства различных кругов при радиусе $R = 17,5$ м как отношение (1) просуммированных значений удерживающих и сдвигающих сил по всем вертикальным отсекам. В таблице 1 приведены все элементы проведенного расчета устойчивости грунтового откоса с указанным радиусом применительно к условиям задачи [4, рис. 135, с. 183] с заданными координатами точек $A(x_A; y_A)$ и $O(0;0)$.

Таблица 1. Параметры круговой кривой скольжения при $R = 17,5$ м ($x_p = 5,964$ м; $y_p = 16,64$ м)

Table 1. Parameters of the circular slip curve at $R = 17,5$ м ($x_p = 5,964$ м; $y_p = 16,64$ м)

№	x_n	y_n	h_1	h_2	G_n	θ_n	S_n	N_n	T_n	l_n	C_n
1	1	-0,33	0	-0,33	1,23	-0,29	-0,35	1,18	0,38	2,09	2,09
2	3	-0,79	0,4	-0,79	4,35	-0,17	-0,74	4,29	1,39	2,03	2,03
3	5	-1,02	1,2	-1,02	7,95	-0,06	-0,44	7,94	2,58	2	2
4	7	-1,02	2	-1,02	10,68	0,06	0,68	10,67	3,47	2,01	2,01
5	9	-0,78	2,8	-0,78	12,56	0,17	2,18	12,37	4,02	2,03	2,03
6	11	-0,31	3,6	-0,31	13,53	0,29	3,89	12,96	4,72	2,09	0,63
7	13	0,43	3,97	0	13,66	0,41	5,49	12,51	4,55	2,19	0,66
8	15	1,47	3,74	0	12,85	0,54	6,63	11	4,00	2,34	0,70
9	17	2,87	3,13	0	10,77	0,68	6,79	8,36	3,04	2,58	0,78
1	19	4,78	1,22	0	4,21	0,84	3,14	2,81	1,02	3,02	0,91
0							$\Sigma S = 29,176$		$\Sigma T = 27,231$		$\Sigma C = 13,823$

$$K_{уст} = \frac{\Sigma F_{уд}}{\Sigma S_{сд}} = \frac{\Sigma T + \Sigma C}{\Sigma S} = 1,579$$

Также на рисунке 1 показано очертание кривой скольжения при радиусе $R = 12,0$ м (кривая 2), для которого подсчитанное значение коэффициента устойчивости составило $K_{y_{cm}} = 1,759$.

На рисунке 2 приведены данные расчетов методом конечных элементов по численной программе «OTKOC-22» [6, 7] устойчивости рассматриваемого грунтового откоса при радиусах ($R = 17,5$ м; $R = 12,0$ м) кривой скольжения, проходящих через заданные точки $A(x_A; y_A)$, $O(0;0)$ с соответствующими значениями коэффициентов устойчивости $K_{y_{cm}} = 1,615$ и $K_{y_{cm}} = 1,746$, с которыми вполне адекватно согласуются вышеизложенные результаты аналитических расчетов: $K_{y_{cm}} = 1,579$ ($-2,2\%$) при $R = 17,5$ м и $K_{y_{cm}} = 1,759$ ($+0,7\%$) при $R = 12,0$ м.

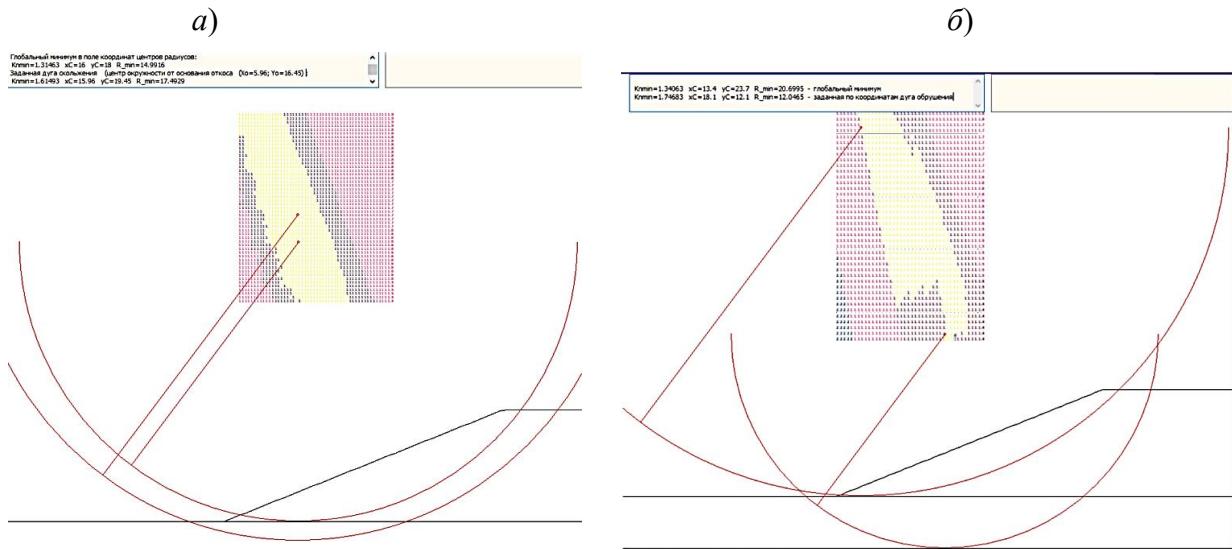


Рис. 2. Численные расчеты по программе «ОТКОС-22» устойчивости грунтового откоса по круговой кривой при радиусах: а) $R=17,5\text{ м}$; б) $R=12,0\text{ м}$ со значениями коэффициентов устойчивости $K_{y\text{cm}}=1,615$ и $K_{y\text{cm}}=1,746$.

Fig. 2. Numerical calculations according to the OTKOS-22 program for the stability of a soil slope along a circular curve at radii: а) $R=17,5\text{ m}$; б) $R=12,0\text{ m}$ with values of stability coefficients $K_{y\text{cm}}=1,615$ and $K_{y\text{cm}}=1,746$.

Нижне-гиперболические кривые скольжения оползневого массива

Расчет устойчивости оползневого массива по семейству нижне-гиперболических (с низовой кривизной) кривых скольжения для рассматриваемой расчетной схемы (рис. 1) производится с целью расширения области поиска очертаний наиболее опасных кривых с наименьшей устойчивостью. При этом уравнения нижне-гиперболических кривых скольжения, соответствующие ветвям гиперболы IV квадранта, смещенным влево и повернутым влево на 90^0 , выражаются зависимостью (рис. 1, кривая 3) [2, 6, 8]

$$y = \frac{a_2}{b_2} \left(\sqrt{x^2 + b_2^2} - b_2 \right), \quad (12)$$

где a_2 и b_2 – полуоси гиперболы, причем величины a_2 задаются методом подбора ($a_2 = 0,1; 1; 5; 10$ и др.), в соответствии с которыми находятся значения b_2 по формуле

$$b_2 = \frac{a_2 x_A}{\sqrt{y_A(y_A + 2a_2)}}. \quad (13)$$

При этом значения x_n , y_n для отдельного n -го вертикального отсека определяются по зависимостям

$$x_n = b(n - 0,5); \quad y_n = \frac{a_2}{b_2} \left(\sqrt{x_n^2 + b_2^2} - b_2 \right), \quad (14)$$

а значение угла наклона θ_n по формуле [2, 2a]

$$\theta_n = \operatorname{arctg} \left[\frac{a_2}{b_2} \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + b_2^2}} \right]. \quad (15)$$

В рассматриваемом случае нижне-гиперболические кривые скольжения пересекают грунтовый откос BE в точке $C(x_C; y_C)$, не захватывая основание, то есть профили кривых скольжения полностью проходят в однородной области грунтового откоса, при этом значения x_C и y_C равны:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= m \cdot y_C + x_E; & y_C &= A_2 - \sqrt{A_2^2 - B_2}, \\ A_2 &= \frac{\alpha m x_E + b_2}{\alpha^2 m^2 - 1}; & B_2 &= \frac{\alpha^2 x_E^2}{\alpha^2 m^2 - 1}; & \alpha &= \frac{a_2}{b_2}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Длина дуги кривой скольжения l_n в n -м отсеке находится по формуле

$$l_n = l_{+n} - l_{-n}, \quad (17)$$

где значения l_{-n} и l_{+n} определяются зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } x_n \leq x_J & \quad l_{-n} = 1,01 \sqrt{x_{-n}^2 + y_{-n}^2}; & l_{+n} &= 1,01 \sqrt{x_{+n}^2 + y_{+n}^2}; \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{при } x_n > x_J & \quad l_{-n} = 1,01 \left[\sqrt{x_J^2 + y_J^2} + \sqrt{(y_{-n} - y_J)^2 + (x_{-n} - x_J)^2} \right]; \\ l_{+n} &= 1,01 \left[\sqrt{x_J^2 + y_J^2} + \sqrt{(y_{+n} - y_J)^2 + (x_{+n} - x_J)^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

в которых

$$\left. \begin{aligned} x_{-n} &= (n-1)b; & y_{-n} &= \frac{a_2}{b_2} \left(\sqrt{x_{-n}^2 + b_2^2} - b_2 \right); \\ x_{+n} &= nb; & y_{+n} &= \frac{a_2}{b_2} \left(\sqrt{x_{+n}^2 + b_2^2} - b_2 \right); \\ x_J &= \frac{b_2^2}{a_2}; & y_J &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2} - a_2; \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$x_J = 33,003$, $y_J = 16,071$ – координаты образа фокуса гиперболы (J) на линии скольжения (на рис. 1 не показаны).

Формулы (12)–(20) позволяют находить все геометрические параметры вертикальных отсеков нижне-гиперболических кривых скольжения.

Величины силы тяжести для каждого n -го вертикального отсека G_n определяются по формуле

$$G_n = b h_l \gamma_1, \quad (21)$$

где значения h_l для рассматриваемого отсека будут равны:

$$\left. \begin{aligned} h_l &= 0, & \text{при } x_n \leq x_C; \\ h_l &= \frac{x_n - x_C}{m} - y_n, & \text{при } x_C < x_n \leq x_B; \\ h_l &= H - y_n, & \text{при } x_B < x_n \leq x_A. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

В таблице 2 приведены все элементы проведенного расчета устойчивости грунтового откоса в рамках семейства нижне-гиперболических кривых скольжения для рассматриваемой расчетной схемы [4, рис. 135, с. 183], в котором получено очертание кривой скольжения с наименьшей устойчивостью $K_{y_{cm}} = 1,423$ при значениях фокусов гиперболической кривой $a_2 = 300,0$, $b_2 = 99,504$ (рис. 1, кривая 3). Таким образом, расширение области исследований очертаний кривых скольжения показало, что нижне-гиперболическая кривая имеет существенно меньшую устойчивость ($\sim 11\%$), чем круговая кривая скольжения, равная $K_{y_{cm}} = 1,579$.

Таблица 2. Параметры низовой гиперболической кривой скольжения при $a_2 = 300$

Table 2. Parameters of the lower hyperbolic slip curve for $a_2 = 300$

№	x_n	y_n	h_1	h_2	G_n	θ_n	T_n	N_n	S_n	L_n	C_n
1	1	0,02	0	0	0	0,03	0	0	0	2,02	0,61
2	2	0,14	1,06	0	3,66	0,09	1,33	3,64	0,33	2,03	0,61
3	3	0,38	1,62	0	5,58	0,15	2,01	5,52	0,83	2,04	0,611
4	7	0,74	2,06	0	7,08	0,21	2,52	6,93	1,47	2,05	0,62
5	9	1,23	2,38	0	8,17	0,27	2,87	7,8	2,14	2,08	0,62
6	11	1,83	2,57	0	8,85	0,32	3,06	8,4	2,78	2,10	0,63
7	13	2,55	2,65	0	9,12	0,37	3,09	8,49	3,32	2,13	0,64
8	15	3,39	2,61	0	8,98	0,42	2,98	8,19	3,68	2,17	0,65
9	17	4,35	2,45	0	8,44	0,47	2,74	7,52	3,82	2,21	0,66
10	19	5,42	2,18	0	1,99	0,52	0,63	1,74	0,98	2,26	0,68
							$\Sigma T =$ 19,356		$\Sigma S =$ 21,226		$\Sigma C =$ 6,327

$$K_{y_{cd}} = \frac{\Sigma F_{y_{cd}}}{\Sigma S_{cd}} = \frac{\Sigma S + \Sigma C}{\Sigma T} = 1,423$$

ВЕРХНЕ-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ СКОЛЬЖЕНИЯ ОПОЛЗНЕВОГО МАССИВА

Расчет устойчивости оползневого массива по семейству верхне-гиперболических (с верховой кривизной) кривых скольжения проводится как часть комплексного исследования по поиску наиболее опасных очертаний кривых с наименьшей устойчивостью. При этом уравнения верхне-гиперболических кривых скольжения, соответствующие ветвям гиперболы III квадранта, смещенным вправо-вверх, выражаются зависимостью (рис. 1, кривая 4) [2, 6, 8]

$$y = y_A - \frac{b_3}{a_3} \sqrt{(x_A - x)(x_A - x + 2a_3)}, \quad (23)$$

в которой значения a_3 задаются методом подбора (например: $a_3 = 0,1; 1; 5; 10$ и др.), а величина b_3 находится по формуле

$$b_3 = \frac{a_3 y_A}{\sqrt{x_A(x_A + 2a_3)}}. \quad (24)$$

При этом значения x_n , y_n для отдельного n -го вертикального отсека определяются по зависимостям

$$x_n = b(n - 0,5); \quad y_n = y_A - \frac{b_3}{a_3} \sqrt{(x_A - x_n)(x_A - x_n + 2a_3)}, \quad (25)$$

а значение угла наклона θ_n – по формуле [2, 6]

$$\theta_n = \operatorname{arctg} \left[\frac{b_3}{a_3} \frac{x_A - x_n + a_3}{\sqrt{(x_A - x_n)(x_A - x_n + 2a_3)}} \right].$$

В рассматриваемом случае нижне-гиперболические кривые скольжения пересекают грунтовый откос BE , не захватывая основание, то есть профили кривых скольжения полностью проходят в однородной области грунтового откоса.

В данном случае верхне-гиперболические кривые скольжения также пересекают грунтовый откос BE в точке $C(x_C; y_C)$, не захватывая основание, при этом значения x_C и y_C находятся по формулам

$$\left. \begin{aligned} x_C &= m \cdot y_C + x_E; & y_C &= A_3 - \sqrt{A_3^2 - B_3}; \\ A_3 &= \frac{y_A - m\beta^2(\sigma + a_3)}{1 - m^2 \beta^2}; & B_3 &= \frac{y_A^2 - \beta^2 \sigma(\sigma + 2a_3)}{1 - m^2 \beta^2}; \\ \beta &= \frac{a_3}{b_3}; & \sigma &= x_A - x_E. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Длина дуги кривой скольжения l_n в n -м отсеке находится по формуле

$$l_n = l_{+n} - l_{-n},$$

где значения l_{-n} и l_{+n} определяются зависимостями

$$\left. \begin{aligned} &\text{– при } x_n \leq x_I \quad l_{-n} = 1,01 \sqrt{x_{-n}^2 + y_{-n}^2}; \quad l_{+n} = 1,01 \sqrt{x_{+n}^2 + y_{+n}^2}; \\ &\text{– при } x_n > x_I \quad l_{-n} = 1,01 \left[\sqrt{x_I^2 + y_I^2} + \sqrt{(y_{-n} - y_I)^2 + (x_{-n} - x_I)^2} \right]; \\ &\quad l_{+n} = 1,01 \left[\sqrt{x_I^2 + y_I^2} + \sqrt{(y_{+n} - y_I)^2 + (x_{+n} - x_I)^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

в которых

$$\left. \begin{aligned} x_{-n} &= (n - 1)b; & y_{-n} &= y_A - \frac{b_3}{a_3} \sqrt{(x_A - x_{-n})(x_A - x_{-n} + 2a_3)}; \\ x_{+n} &= nb; & y_{+n} &= y_A - \frac{b_3}{a_3} \sqrt{(x_A - x_{+n})(x_A - x_{+n} + 2a_3)}; \\ x_I &= x_A + a_3 - \sqrt{a_3^2 + b_3^2}; & y_I &= y_A - \frac{b_3^2}{a_3}; \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$x_I = 19,555$, $y_I = 5,109$ – координаты образа фокуса гиперболы (I) на линии скольжения (рис. 1).

Формулы (23) – (28) позволяют находить все геометрические параметры вертикальных отсеков верхне-гиперболических кривых скольжения.

Величины силы тяжести G_n и высоты h_1 для каждого n -го вертикального отсека верхне-гиперболического очертания кривой скольжения определяются так же, как и для нижне-гиперболического случая, соответственно по формулам (21) и (22).

В таблице 3 приведены результаты проведенного расчета устойчивости грунтового откоса по семейству верхне-гиперболических кривых скольжения для расчетной схемы [4, рис. 135, с. 183], в котором получено очертание кривой скольжения с коэффициентом устойчивости $K_{y_{cm}} = 1,697$ при значениях фокуса гиперболической кривой $a_3 = 1000,0$; $b_3 = 29,851$ (рис. 1, кривая 4). Полученное значение коэффициентов устойчивости превышает аналогичные показатели кривых скольжения – для круговой кривой на 7,5 %, а для нижне-гиперболической (наиболее близкой к рассматриваемой) – на 19,2 %.

Таблица 3. Параметры верховой гиперболической кривой скольжения при $a_3 = 2000$

Table 3. Parameters of the upper hyperbolic slip curve at $a_3 = 2000$

№	x_n	y_n	h_1	h_2	G_n	θ_n	T_n	N_n	S_n	L_n	C_n
1	1	0,15	0	0	0	-0,29	0	0	0	2,04	0,61
2	3	0,47	0	0	0	-0,17	0	0	0	2,05	0,61
3	5	0,81	0,39	0	1,34	-0,06	0,48	0,23	2,578	2,05	0,62
4	7	1,17	0,83	0	2,85	0,06	1,02	0,52	3,465	2,06	0,6
5	9	1,56	1,24	0	4,27	0,17	1,52	0,85	4,019	2,06	0,62
6	11	1,99	1,61	0	5,55	0,29	1,97	1,21	4,718	2,07	0,62
7	13	2,46	1,94	0	6,67	0,41	2,35	1,64	4,553	2,08	0,62
8	15	3,01	2,19	0	7,53	0,54	2,63	2,16	4,004	21	0,63
9	17	3,69	2,31	0	7,96	0,68	2,70	2,86	3,041	2,14	0,64
10	19	4,67	1,34	0	4,59	0,84	1,39	2,55	1,022	2,54	0,76
							$\Sigma T = 12,036$		$\Sigma S = 14,065$		$\Sigma C = 6,355$
$K_{уст} = \frac{\Sigma F_{yд}}{\Sigma S_{cd}} = \frac{\Sigma S + \Sigma C}{\Sigma T} = 1,697$											

Выводы

Предложенная методика определения очертаний наиболее опасных кривых скольжения грунтовых массивов с комплексным рассмотрением на основе метода Терцаги семейств круговых и гиперболических (с нижней и верхней кривизной) линий скольжения значительно расширяет области поиска линий наименьшей устойчивости откосов. Полученные результаты, протестированные для грунтового откоса при заданных двух точках на линии скольжения, показали:

– адекватность (~2 %) предложенного аналитического решения для круговых кривых в сравнении с результатами численного расчета по программе «OTKOC-22»;

– линией наименьшей устойчивости для рассматриваемого случая является нижне-ги-перболическая кривая скольжения откоса с фокусами $a_2 = 300,0$, $b_2 = 99,504$ и коэффициентом устойчивости $K_{y_{cm}} = 1,423$, что на 11 % ниже коэффициента устойчивости круговой кривой скольжения;

– коэффициенты устойчивости откосов по линиям скольжения, достаточно близко расположенным друг к другу, но имеющим различные очертания (например, нижне- и верхне-ги-перболические), могут существенно различаться – в рассматриваемом случае более 19 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кропоткин М. П. Расчеты устойчивости склонов с использованием алгоритмов минимизации коэффициента устойчивости // Инженерные изыскания. 2017. № 1. С. 20–30. EDN: XXRLRN
2. Анахаев К. Н., Беликов В. В., Анахаев К. К. и др. О расчете поверхностей скольжения береговых склонов на основе дистанционных данных // Процессы в геосредах. 2022. № 3. С. 1655–1663. EDN: MHLHXH
3. Бухарцев В. Н., Нгуен Т. Х. Оценка устойчивости грунтовых массивов // Инженерно-строительный журнал. 2012. № 9. С. 41–48. EDN: PQNQMR
4. Дворяшин В. И. Военная гидротехника (водные заграждения). М.: ИВИА, 1940. 360 с.
5. Гидротехнические сооружения / Под ред. Розанова Н. П. М.: Агропромиздат, 1985. 432 с.
6. Анахаев К. Н., Бестужева А. С., Беликов В. В., Анахаев К. К. Устойчивость неоднородного откоса с заданными точками кривых скольжения // Современные проблемы гидравлики и гидротехнического строительства. Сб. тез. докладов VIII Всероссийского научно-практического семинара, 21 мая 2025 г. М.: НИУ МГСУ ИГЭС, 2025.
7. Бестужева А. С. Вычислительная программа «ОТКОС-22» для расчета устойчивости откосов и склонов при сейсмических воздействиях // Современные проблемы гидравлики и гидротехнического строительства. Сборник тезисов докладов VI Всероссийского научно-практического семинара, 24 мая 2023 г. М.: НИУ МГСУ ИГЭС, 2023. С. 79–80. EDN: TRWVRH
8. Анахаев К. Н., Беликов В. В., Анахаев К. К. О гиперболических поверхностях при расчетах береговых склонов на основе дистанционных данных // Современные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов Международной научной конференции. Т. 1. Нальчик: КБГУ, 2022. С. 6–8. EDN: KYKECL

REFERENCES

1. Kropotkin M.P. Slope stability calculations using stability coefficient minimizing algorithms. *Engineering Survey*. 2017. No. 1. Pp. 20–30. EDN: XXRLRN. (In Russian)
2. Anakhaev K.N., Belikov V.V., Anakhaev K.K. et al. On the calculation of the sliding surfaces of coastal slopes based on remote data. *Processy v geosredah* [Processes in Geomedia]. 2022. No. 3. Pp. 1655–1663. EDN: MHLHXH. (In Russian)
3. Bukhartsev V.N., Nguen T.Kh. Assessment of the stability of soil massifs. *Magazine of Civil Engineering*. 2012. No. 9. Pp. 41–48. EDN: PQNQMR. (In Russian)
4. Dvoryashin V.I. *Voyennaya gidrotehnika (vodnyye zagrashdeniya)* [Military hydraulic engineering (water barriers)]. Moscow: IVIA, 1940. 360 p. (In Russian)
5. *Gidrotekhnicheskiye sooruzheniya* [Hydraulic engineering structures]. Edited by Rozanova N.P. Moscow: Agropromizdat, 1985. 432 p. (In Russian)

6. Anakhaev K.N., Bestuzheva A.S., Belikov V.V., Anakhaev K.K. Stability of an inhomogeneous slope with specified points of sliding curves. *Modern Problems of Hydraulics and Hydraulic Engineering. Collection of reports of the VIII-th All-Russian Scientific and Practical Seminar*, May 21, 2025. Moscow: NRU MGSU IGES, 2025. (In Russian)
7. Bestuzheva A.S. Computational program "SLOPE-22" for calculating the stability of slopes and slopes under seismic impacts. *Modern Problems of Hydraulics and Hydraulic Engineering. Collection of reports of the VI All-Russian Scientific and Practical Seminar*, May 24, 2023. Moscow: NRU MGSU IGES, 2023. Pp. 79–80. EDN: TRWVRH. (In Russian)
8. Anakhaev K.N., Belikov V.V., Anakhaev K.K. On hyperbolic surfaces in calculations of coastal slopes based on remote data. *Modern Problems of Applied Mathematics, Computer Science and Mechanics. Proceedings of the International Scientific Conference*. Vol. 1. Nalchik: KBSU, 2022. Pp. 6–8. EDN: KYKECL. (In Russian)

Авторский вклад. Все авторы принимали непосредственное участие в планировании, выполнении и анализе данного исследования. Все авторы настоящей статьи ознакомились и одобрили представленный окончательный вариант.

Author's contribution. All authors of this research paper have directly participated in the planning, execution, or analysis of this study. All authors of this paper have read and approved the final version submitted.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственных заданий организаций, в том числе, ИПМА КБНЦ РАН (тема № FMEW-2025-0014), ИВП РАН (тема № FMWZ-2025-0003).

Funding. The work was carried out within the framework of state assignments by organizations, including the Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (theme No. FMEW-2025-0014) and the Water Problems Institute of the Russian Academy of Sciences (theme No. FMWZ-2025-0003).

Информация об авторах

Анахеев Кошкынбай Назирович, д-р техн. наук, профессор, гл. науч. сотр., Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук;

360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А;

вед. науч. сотр., Институт водных проблем Российской академии наук;

119333, Россия, Москва, ул. Губкина, 3;

anaha13@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4357-4349>, SPIN-код: 5974-4403

Бестужева Александра Станиславовна, канд. техн. наук, доцент кафедры гидравлики и гидротехнического строительства, Институт гидротехнического и энергетического строительства, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет;

129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, 26, корп. УЛБ;

alex_bestu@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0821-4922>, SPIN-код: 7762-8776

Беликов Виталий Васильевич, д-р техн. наук, профессор, гл. науч. сотр., заведующий лабораторией, Институт водных проблем Российской академии наук;

119333, Россия, Москва, ул. Губкина, 3;

belvv@bk.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1760-4498>, SPIN-код: 6174-7895

Балкизов Афрасим Баширович, канд. техн. наук, доцент кафедры природообустройства, Кабардино-Балкарский государственный аграрный университет имени В. М. Кокова;

360030, Россия, г. Нальчик, пр-т Ленина, 1в;

afrasim_1960@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4220-9107>, SPIN-код: 4015-8381

Мамчукев Мухтар Османович, канд. физ.-мат. наук, науч. сотр., Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук;

360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А;

mamchuevmc@yandex.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3830-7804>, SPIN-код: 1074-2232

Information about the authors

Koshkinbai N. Anakhaev, Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher, Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences;

360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street;

Leading Researcher, Institute of Water Problems of the Russian Academy of Sciences;

119333, Russia, Moscow, 3 Gubkin street;

anaha13@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4357-4349>, SPIN-code: 5974-4403

Alexandra S. Bestuzheva, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Hydraulics and Hydraulic Engineering, Institute of Hydraulic Engineering and Energy Construction of the Moscow State University of Civil Engineering (National Research University);

129337, Russia, Moscow, 26 Yaroslavskoye highway, building ULB;

alex_bestu@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0821-4922>, SPIN-code: 7762-8776

Vitaly V. Belikov, Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher, Institute of Water Problems of the Russian Academy of Sciences;

119333, Russia, Moscow, 3 Gubkin street;

belvv@bk.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1760-4498>, SPIN-code: 6174-7895

Afrasim B. Balkizov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Environmental Management, Kabardino-Balkarian State Agrarian University named after V.M. Kokov;

360030, Russia, Nalchik, 1v Lenin avenue;

afrasim_1960@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4220-9107>, SPIN-code: 4015-8381

Mukhtar O. Mamchuev, Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Researcher, Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences;

360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street;

mamchuevmc@yandex.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3830-7804>, SPIN-code: 1074-2232