МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 519.21:517.977.56 Научная статья
DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-3-11-28
EDN: BHZCDK

Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков для непрерывной стохастической задачи управления типа Россера

Р. О. Масталиев

Университет «Азербайджан»
Az1007, Азербайджан, г. Баку, ул. Дж. Гаджибейли, 71
Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджанской Республики
Az1141, Азербайджан, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 68

Аннотация. Данная работа посвящена изучению особого, в классическом смысле, случая и выводу необходимых условий оптимальности второго порядка в терминах второй вариации минимизируемого функционала в стохастической задаче управления, описываемой системой стохастических нелинейных гиперболических уравнений первого порядка, записанной в канонической форме. **Результаты**. Для одной стохастической задачи оптимального управления, описываемой стохастической системой нелинейных гиперболических уравнений первого порядка, получены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков, которые представляют собой соответственно стохастические аналоги уравнения Эйлера и условия оптимальности классической экстремали. **Методы**. При получении результатов использовались теории оптимального управления и вариационного исчисления с учетом стохастических свойств рассматриваемой задачи. Подобные задачи управления возникают при оптимизации ряда химико-технологических процессов под влиянием случайных воздействий.

Ключевые слова: стохастическая система типа Россера, винеровский случайный процесс, оптимальность, аналог уравнения Эйлера, условия оптимальности второго порядка

Поступила 27.03.2025, одобрена после рецензирования 28.04.2025, принята к публикации 07.05.2025

Для цитирования. Масталиев Р. О. Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков для непрерывной стохастической задачи управления типа Россера // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2025. Т. 27. № 3. С. 11–28. DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-3-11-28

MSC: 93E20 Original article

First and second order necessary optimality conditions for a continuous stochastic control problem of Rosser type

R.O. Mastaliyev

Azerbaijan University
Az1007, Azerbaijan, Baku, 71 J. Hajibeyli street
Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan
Az1141, Azerbaijan, Baku, 68 B. Vahabzade street

Abstract. This paper is devoted to the study of a singular, in the classical sense, case and the derivation second order necessary optimality conditions in terms of the second variation of the minimizable functional in the stochastic control problem described by first order stochastic nonlinear hyperbolic equations system written in the canonical form. **Results**. For one stochastic optimal control problem described by a stochastic system of first-order nonlinear hyperbolic equations, necessary conditions of first- and second-order optimality are obtained, which are, respectively, stochastic analogs of the Euler equation and optimality conditions for the classical extremal. **Methods**. In obtaining the results, theories of optimal control and calculus of variations were used, taking into account the stochastic properties of the problem under consideration. Similar control problems arise in the optimization of a number of chemical-technological processes under the influence of random effects.

Keywords: Rosser-type stochastic system, Wiener random process, optimality, analogue of Euler equation, second-order optimality conditions

Submitted 27.03.2025, approved after reviewing 28.04.2025, accepted for publication 07.05.2025

For citation. Mastaliyev R.O. First and second order necessary optimality conditions for a continuous stochastic control problem of Rosser type. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS.* 2025. Vol. 27. No. 3. Pp. 11–28. DOI: 10.35330/1991-6639-2025-27-3-11-28

Введение

Вопросам, связанным с получением необходимых условий оптимальности первого и второго порядка, в том числе в терминах первой и второй вариации минимизируемого функционала качества для задач оптимального управления для детерминированных динамических систем, описываемых гиперболическими уравнениями первого порядка, посвящено достаточное количество работ [1–3 и др.].

Подобная задача оптимального управления в стохастическом случае рассмотрена в работах [4, 5], и при этом установлены необходимые условия оптимальности первого порядка (аналог принципа максимума Понтрягина, линеаризованный принцип максимума, аналог уравнения Эйлера [6, 7]).

Актуальность исследований в этом направлении обусловливается необходимостью наиболее точного описания, например, систем автоматического управления, ряда химико-технологических процессов [8, 9], реалистичным вариантом которого является стохастическое описание, учитывающее воздействие на объект управления случайных шумов.

Цель исследования – изучение особого, в классическом смысле, случая и вывод необходимых условий оптимальности второго порядка в терминах второй вариации минимизируемого функционала в стохастической задаче управления, описываемой системой стохастических нелинейных гиперболических уравнений первого порядка, записанной в канонической форме.

1. Постановка задачи

Допустим, что управляемый процесс в заданной области $D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$ описывается следующей системой стохастических нелинейных дифференциальных уравнений типа Россера:

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = f(t,x,z,y,u) + p(t,x,z)\frac{\partial W_1(t,x)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial y(t,x)}{\partial x} = g(t,x,z,y,u) + q(t,x,y)\frac{\partial W_2(t,x)}{\partial x}, (t,x) \in D \tag{1}$$

с краевыми условиями типа Гурса:

$$z(t_0,x) = a(x), x \in [x_0,x_1], y(t,x_0) = b(t), t \in [t_0,t_1]. \tag{2}$$

Здесь $\big(z(t,x),y(t,x)\big)-(n+m)$-мерная искомая вектор-функция; $f(t,x,z,y,u)\big(g(t,x,z,y,u)\big)-$ заданная $n(m)$-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными (z,y) до второго порядка, при этом также предполагается, что существуют непрерывные производные $f_{zu}, f_{yu}, f_{uu}, g_{zu}, g_{yu}, g_{uu}$; $p(t,x,z)\big(q(t,x,y)\big)-(n\times n)\ \big((m\times m)\big)$-мерная непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по $z(y)$ матричная функция; белые шумы $\frac{\partial W_1(t,x)}{\partial t},\frac{\partial W_2(t,x)}{\partial x}$ являются производными соответственно по t и x от двухпараметрического винеровского процесса $W_1(t,x)$, $W_2(t,x)$ [10, 11], а $a(x), b(t)-$ заданные измеримые и ограниченные на $[x_0,x_1]$, $[t_0,t_1]$ соответственно вектор-функции соответствующих размерностей.

В качестве допустимых управлений берутся функции из класса измеримых относительно неубывающей борелевской $\sigma-$ алгебры $\mathcal{F}=\bar{\sigma}(W(\tau,s),t_0\le\tau\le t,x_0\le s\le x)$ и ограниченных на D r-мерных вектор-функций $u(t,x)$ со значениями из заданного непустого, ограниченного и открытого множества $U\subset R^r\big(u(t,x)\in L_\infty(D,U)\big)$.

Решение системы (1)–(2), соответствующее определенному допустимому управлению $u(t,x)$, понимается в смысле [12].

Всюду предполагается, что каждому допустимому управлению соответствующее решение системы (1)–(2) существует и единственно в D.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u)=E\left\{\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}F_3\big(t,x,z(t,x),y(t,x),u(t,x)\big)dxdt+\right.$$
$$\left.+\int_{x_0}^{x_1}F_1\big(x,z(t_1,x)\big)dx+\int_{t_0}^{t_1}F_2\big(t,y(t,x_1)\big)dt\right\},\tag{3}$$

определенного на решениях краевой задачи (1)–(2), порожденных всевозможными допустимыми управлениями.

Здесь $F_1(x,z), F_2(t,y), F_3(t,x,z,y,u)-$ заданные скалярные функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по вектору состояния до второго порядка, и существуют непрерывные производные $\frac{\partial^2F_3}{\partial z\partial u},\frac{\partial^2F_3}{\partial y\partial u}$. $E-$ знак математического ожидания.

Нашей целью является вывод стохастического аналога уравнения Эйлера и необходимых условий оптимальности второго порядка для классической экстремали [6, 7] в рассматриваемой стохастической задаче управления с распределенными параметрами (1)–(3).

2. Формула приращения в терминах вариации критерия качества

Пусть $\big(u(t,x),z(t,x),y(t,x)\big)-$ фиксированный, а $\big(\bar{u}(t,x)=u(t,x)+\Delta u(t,x),\bar{z}(t,x)=z(t,x)+\Delta z(t,x),\bar{y}(t,x)=y(t,x)+\Delta y(t,x)\big)-$ произвольный допустимые процессы.

Введем аналог функции Гамильтона – Понтрягина

$$H(t,x,z,y,u,\psi,\lambda)=-F_3(t,x,z,y,u)+\psi' f(t,x,z,y,u)+\lambda' g(t,x,z,y,u)$$

и обозначения типа

$$\Delta_v f[t,x]=f(t,x,z(t,x),y(t,x),v)-f\big(t,x,z(t,x),y(t,x),u(t,x)\big),$$

$$H_z[t,x] = H_z(t,x,z(t,x),y(t,x),u(t,x),\psi(t,x),\lambda(t,x)).$$

Здесь$\big(\psi(t,x),\lambda(t,x),\alpha(t,x),\beta(t,x)\big) \in L_\infty(D,R^n) \times L_\infty(D,R^m) \times L_\infty(D,R^{n\times n}) \times L_\infty(D,R^{m\times m})$ являются решениями следующей стохастической сопряженной задачи:

$$\psi_t(t,x) = -\frac{\partial H(t,x,z,y,u,\psi,\lambda)}{\partial z} + \alpha(t,x)\frac{\partial W(t,x)}{\partial t}, \qquad \psi(t_1,x) = \frac{\partial F_1\big(x,z(t_1,x)\big)}{\partial z},$$

$$\lambda_x(t,x) = -\frac{\partial H(t,x,z,y,u,\psi,\lambda)}{\partial y} + \beta(t,x)\frac{\partial W(t,s)}{\partial s}, \qquad \lambda(t,x_1) = \frac{\partial F_2\big(t,y(t,x_1)\big)}{\partial y}.$$

Применив формулу Тейлора к выражениям $F_1\big(x,\bar z(t_1,x)\big) - F_1\big(x,z(t_1,x)\big)$, $F_2\big(t,\bar y(t,x_1)\big) - F_2\big(t,y(t,x_1)\big)$, $H(t,x,\bar z,\bar y,\bar u,\psi,\lambda) - H(t,x,z,y,u,\psi,\lambda)$ и учитывая введенные обозначения, получаем

$$\Delta S(u) = S\big(\bar u(t,x)\big) - S\big(u(t,x)\big) = E\Bigg\{-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} H_u'[t,x]\Delta u(t,x)dxdt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2 F_1\big(x,z(t_1,x)\big)}{\partial z^2}\Delta z(t_1,x)\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Delta y'(t,x_1)\frac{\partial^2 F_2\big(t,y(t,x_1)\big)}{\partial y^2}\Delta y(t,x_1)\,dt - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z(t,x)H_{zz}[t,x]\Delta z(t,x)\,dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t,x)H_{zy}[t,x]\Delta y(t,x)\,dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta y'(t,x)H_{yz}[t,x]\Delta z(t,x)\,dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta y'(t,x)H_{yy}[t,x]\Delta y(t,x)\,dxdt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta u'(t,x)H_{uz}[t,x]\Delta z(t,x)\,dxdt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta u'(t,x)H_{uy}[t,x]\Delta y(t,x)\,dxdt\Bigg\} + \eta_1(t,x;\Delta u), \tag{4}$$

где по определению

$$\eta_1(t,x;\Delta u) = E\Bigg\{\int_{x_0}^{x_1} o_1(\|\Delta z(t_1,x)\|^2)dx + \int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta y(t,x_1)\|^2)dt -$$

$$\left.-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} o_3([\![\|\Delta z(t,x)\| + \|\Delta y(t,x)\| + \|\Delta u(t,x)\|]\!]^2)dxdt\right\}, \tag{5}$$

где $\|\Delta z\|$ – норма вектора $\Delta z = (\Delta z_1, \Delta z_2, \dots, \Delta z_n)$, определяемая формулой $\|\Delta z\| = \sum_{i=1}^{n}|\Delta z_i|$, а всюду $\frac{o_i(\propto^2)}{\alpha^2} \to 0$ при $\propto \to 0$.

Теперь покажем, что почти для всех $(t,x) \in D$ справедливы следующие оценки:

$$\|\Delta z(t,x)\| \le K_1 E\left(\int_{t_0}^{t}\|\Delta u(\tau,x)\|d\tau + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\|\Delta u(\tau,s)\|dsd\tau\right), \tag{6}$$

$$\|\Delta y(t,x)\| \le K_2 E\left(\int_{x_0}^{x}\|\Delta u(t,s)\|ds + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\|\Delta u(\tau,s)\|dsd\tau\right), \tag{7}$$

где $K_i = const > 0, i = 1,2$.

Сначала заметим, что из системы уравнений (1) с учетом (2) получим

$$\Delta z(t,x) = \int_{t_0}^{t}[f(\tau,x,\bar z,\bar y,\bar u) - f(\tau,x,z,y,u)]\,d\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{t}[p(\tau,x,\bar z) - p(\tau,x,z)]\frac{\partial \mathrm{W}_1(\tau,x)}{\partial\tau}d\tau,$$

$$\Delta y(t,x) = \int_{x_0}^{x}[g(t,s,\bar z,\bar y,\bar u) - f(t,s,z,y,u)]\,ds +$$

$$+\int_{x_0}^{x}[q(t,s,\bar z) - q(t,s,z)]\frac{\partial \mathrm{W}_2(t,s)}{\partial s}ds.$$

Отсюда, переходя к норме и используя условие Липшица, а также принимая от обеих частей полученных неравенств математические ожидания, делаем вывод:

$$E\|\Delta z(t,x)\| \le E\left\{\int_{t_0}^{t}\|\Delta u(\tau,x)\|\,d\tau + L_1\int_{t_0}^{t}(\|\Delta z(\tau,x)\| + \|\Delta y(\tau,x)\|)d\tau\right\},$$

$$E\|\Delta y(t,x)\| \le E\left\{\int_{x_0}^{x}\|\Delta u(t,s)\|\,ds + L_2\int_{x_0}^{x}(\|\Delta z(t,s)\| + \|\Delta y(t,s)\|)ds\right\}.$$

Применяя к последним двум неравенствам известную лемму Гронуолла – Вендроффа [13], имеем

$$E\|\Delta z(t,x)\| \le E\left\{\int_{t_0}^{t}\|\Delta u(\tau,x)\|\,d\tau + L_3\int_{t_0}^{t}\|\Delta y(\tau,x)\|d\tau\right\},$$

$$E\|\Delta y(t,x)\| \leq E\left\{\int_{x_0}^{x} \|\Delta u(t,s)\|\, ds + L_4 \int_{x_0}^{x} \|\Delta z(t,s)\| ds\right\},$$

где $L_i = const > 0, i = \overline{1{,}4}$, и, наконец, усиливая последние неравенства друг другом и снова применяя лемму Гронуолла – Вендроффа, получаем справедливость оценки (6) для $\|\Delta z(t,x)\|$ и оценку (7) для $\|\Delta y(t,x)\|$, что и следовало доказать.

Специальное приращение допустимого управления $u(t,x)$ определим по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t,x) = \varepsilon\delta u(t,x), (t,x) \in D. \tag{8}$$

Здесь $\varepsilon -$ достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t,x) \in L_\infty(D,U) -$ произвольная измеримая и ограниченная в D r-мерная вектор-функция (вариация управления).

Здесь мы воспользовались тем фактором, что область управления $U -$ открытое множество.

Через $(\Delta z_\varepsilon(t,x),\ \Delta y_\varepsilon(t,x))$ обозначим специальное приращение системы (1)–(2), соответствующее специальному приращению (8) управления.

Используя оценки (6), (7) и формулу (8) по схеме, аналогичной из [14, 15], получаем справедливость разложений

$$\Delta z_\varepsilon(t,x) = \varepsilon\delta z(t,x) + o(\varepsilon;t,x),$$

$$\Delta y_\varepsilon(t,x) = \varepsilon\delta y(t,x) + o(\varepsilon;t,x). \tag{9}$$

Здесь $\big(\delta z(t,x), \delta y(t,x)\big) -$ вариация вектора состояния, являющаяся решением стохастического уравнения в вариациях

$$(\delta z)_t = f_z[t,x]\delta z + f_y[t,x]\delta y + f_u[t,x]\delta u + p_z[t,x]\delta z\frac{\partial W_1(t,x)}{\partial t},$$

$$(\delta y)_x = g_z[t,x]\delta z + g_y[t,x]\delta y + g_u[t,x]\delta u + q_y[t,x]\delta y\frac{\partial W_2(t,x)}{\partial x}, \tag{10}$$

с нулевой граничной условий

$$\delta z(t_0,x) = 0, x \in [x_0,x_1], , \delta y(t,x_0) = 0, t \in [t_0,t_1]. \tag{11}$$

Теперь, принимая во внимание (5), (8), (9), из (4) убеждаемся, что первая $(\delta^1 S(u;\delta u))$ и вторая $(\delta^2 S(u;\delta u))$ вариации функционала $S(u)$ (в классическом смысле) определяются соответственно формулами:

$$\delta^1 S(u;\delta u) = -E\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} H'_u[t,x]\delta u(t,x)dxdt,$$

$$\delta^2 S(u;\delta u) = E\left\{\int_{x_0}^{x_1} \delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2 F_1\big(x,z(t_1,x)\big)}{\partial z^2}\delta z(t_1,x)\, dx\right.$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} \delta y'(t,x_1)\frac{\partial^2 F_2\big(t,y(t,x_1)\big)}{\partial y^2}\delta y(t,x_1)\, dt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} [\delta z'(t,x)H_{zz}[t,x]\delta z(t,x) + \delta z'(t,x)H_{zy}[t,x]\delta y(t,x) +$$

$$+\delta y'(t,x)H_{yz}[t,x]\delta z(t,x)+\delta y'(t,x)H_{yy}[t,x]\delta y(t,x)]dxdt+$$

$$\left.-2\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta u'(t,x)H_{uz}[t,x]\delta z(t,x)+\delta u'(t,x)H_{uy}[t,x]\delta y(t,x)]dxdt\right\}.$$

Заметим, что последние две формулы будут иметь важное значение для дальнейшего исследования.

3. Необходимые условия оптимальности первого и второго порядка

Как известно (см., напр., [16]), вдоль оптимального процесса $(u(t,x),z(t,x),y(t,x))$ первая вариация (в классическом смысле) функционала (3) должна равняться нулю, а вторая вариация должна быть неотрицательной:

$$\delta^1 S(u;\delta u)=-E\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H'_u[t,x]\delta u(t,x)dxdt=0, \tag{12}$$

$$\delta^2 S(u;\delta u)=E\left\{\int_{x_0}^{x_1}\delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2 F_1\big(x,z(t_1,x)\big)}{\partial z^2}\delta z(t_1,x)\,dx\right.\;+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\delta y'(t,x_1)\frac{\partial^2 F_2\big(t,y(t,x_1)\big)}{\partial y^2}\delta y(t,x_1)\,dt- \tag{13}$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}[\delta z'(t,x)H_{zz}[t,x]\delta z(t,x)+\delta z'(t,x)H_{zy}[t,x]\delta y(t,x)+$$

$$+\delta y'(t,x)H_{yz}[t,x]\delta z(t,x)+\delta y'(t,x)H_{yy}[t,x]\delta y(t,x)]dxdt+$$

$$\left.-2\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta u'(t,x)H_{uz}[t,x]\delta z(t,x)+\delta u'(t,x)H_{uy}[t,x]\delta y(t,x)]dxdt\right\}\geq 0.$$

Из тождества (12), в силу произвольности $\delta u(t,x)\in L_\infty(D,R^r)$, следует аналог уравнения Эйлера для рассматриваемой задачи (1)–(3).

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1 (аналог уравнения Эйлера [6]). Для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ необходимо, чтобы соотношение

$$EH_u\big(\theta,\xi,z(\theta,\xi),y(\theta,\xi),u(\theta,\xi),\psi(\theta,\xi),\xi(\theta,\xi)\big)=0 \tag{14}$$

выполнялось для всех $(\theta,\mu)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$.

Здесь и в дальнейшем $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$ − произвольная точка Лебега (правильная точка [1, 2]) управления $u(t,x)$.

Поскольку условие (14) является необходимым условием оптимальности первого порядка в рассматриваемой стохастической задаче оптимального управления, оно несет ограниченную информацию об управлении, подозрительном на оптимальность. Чтобы устранить этот недостаток, надо иметь необходимые условия оптимальности второго порядка несмотря на то, что неравенство (13) в принципе является необходимым условием оптимальности второго порядка, но являясь всего лишь неявным необходимым условием оптимальности. В свою очередь это диктует получить явные необходимые условия оптимальности второго порядка, явно выраженные непосредственно через параметры стохастической задачи (1)–(3). Займемся этим вопросом.

Интерпретируя уравнения в вариациях (5), (6) как линейные неоднородные стохастические уравнения относительно $\delta z(t,x), \delta y(t,x)$, на основе аналога формулы Коши из [12] получим

$$\delta z(t,x) = \int_{t_0}^{t} V_{11}(t,x;\tau,x) f_u[\tau,x]\,\delta u(\tau,x)d\tau + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} A(t,x;\tau,s)\delta u(\tau,s)dsd\tau, \tag{15}$$

$$\delta y(t,x) = = \int_{x_0}^{x} V_{22}(t,x;t,s) g_u[t,s]\,\delta u(t,s)ds + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} B(t,x;\tau,s)\delta u(\tau,s)dsd\tau, \tag{16}$$

где по определению

$$A(t,x;\tau,s) = \frac{\partial V_{11}(t,x;\tau,s)}{\partial x} f_u[\tau,s] + \frac{\partial V_{12}(t,x;\tau,s)}{\partial x} g_u[\tau,s],$$

$$B(t,x;\tau,s) = \frac{\partial V_{21}(t,x;\tau,s)}{\partial t} f_u[\tau,s] + \frac{\partial V_{22}(t,x;\tau,s)}{\partial t} g_u[\tau,s].$$

Здесь $V_{ij}(t,x;\tau,s)$, $(t_0 \le \tau \le t \le t_1, x_0 \le s \le x \le x_1)$, $i,j = 1,2$ – матричные функции, являющиеся решениями следующих стохастических задач [12]:

$$\frac{\partial V_{11}(t,x;\tau,s)}{\partial \tau} = -V_{11}(t,x;\tau,s) f_z[\tau,s] - V_{12}(t,x;\tau,s) g_z[\tau,s] - \\ -V_{11}(t,x;\tau,s) p[\tau,s] \frac{\partial W(\tau,s)}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial V_{12}(t,x;\tau,s)}{\partial s} = V_{11}(t,x;\tau,s) f_y[\tau,s] - V_{12}(t,x;\tau,s) g_y[\tau,s] - \\ -V_{12}(t,x;\tau,s) q[\tau,s] \frac{\partial W(\tau,s)}{\partial s},$$

$$\frac{\partial V_{21}(t,x;\tau,s)}{\partial \tau} = -V_{21}(t,x;\tau,s) f_z[\tau,s] - V_{22}(t,x;\tau,s) g_z[\tau,s] - \\ -V_{21}(t,x;\tau,s) p[\tau,s] \frac{\partial W(\tau,s)}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial V_{22}(t,x;\tau,s)}{\partial s} = -V_{21}(t,x;\tau,s) f_z[\tau,s] - V_{21}(t,x;\tau,s) g_z[\tau,s] \\ -V_{22}(t,x;\tau,s) q[\tau,s] \frac{\partial W(\tau,s)}{\partial s},$$

$$V_{11}(t,x;t,s) = E_1, V_{12}(t,x;\tau,x) = 0, t_0 \le \tau \le t, V_{21}(t,x;t,s) = 0,$$

$$V_{22}(t,x;t,s) = E_2,\ x_0 \le s \le x,$$

где E_1, E_2 – единичные матрицы соответствующих размерностей.

Для дальнейших изложений введем в рассмотрение $(n \times n)$-матричную функцию $R(x, \tau, s)$ и $(m \times m)$-матричную функцию $Q(t, \tau, s)$ посредством следующих формул:

$$R(x,\tau,s) = \int_{\max(\tau,s)}^{t_1} V'_{11}(t,x;\tau,x)\, H_{zz}[t,x]V_{11}(t,x;s,x)dt -$$

$$-V'_{11}(t_1,x;\tau,x)\frac{\partial^2 F_1\big(x,z(t_1,x)\big)}{\partial z^2}V_{11}(t_1,x;s,x),$$

$$Q(t,\tau,s) = \int_{\max(\tau,s)}^{x_1} V'_{22}(t,x;t,x)\, H_{yy}[t,x]V_{22}(t,x;t,s)dx -$$

$$-V'_{22}(t,x_1;t,\tau)\frac{\partial^2 F_2\big(t,y(t,x_1)\big)}{\partial y^2}V_{22}(t,x_1;t,s).$$

Отсюда, следуя работам [1, 2], при помощи представлений (15), (16) решений δz и δy вторую вариацию критерия качества (3), определяемую формулой (13), можно преобразовать к виду

$$\delta^2 S(u;\delta u) = E\Bigg\{-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1} \delta u'(\tau,x) f'_u[\tau,x]R(x,\tau,s)f_u[s,x]\delta u(s,x)dsdxd\tau$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1} \delta u'(t,\tau)g'_u[t,\tau]\,Q(t,\tau,s)g_u[t,s]\delta u(t,s)d\tau dsdt -$$

$$-2\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_1} \delta u'(\tau,x)H_{uz}[\tau,x]V_{11}(\tau,x;t,x)d\tau\right] f_u[t,x]\delta u(t,x)dxdt -$$

$$-2\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{x}^{x_1} \delta u'(t,s)H_{uy}[t,s]V_{22}(t,s;t,x)ds\right] g_u[t,x]\delta u(t,x)dxdt$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \delta u'(t,x)H_{uu}[t,x]\delta u(t,x)\Bigg\} + \eta_2(t,x;\delta u), \tag{17}$$

где по определению

$$\eta_2(t,x;\delta u) =$$

$$E\Bigg\{-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}[\delta z'(t,x)\,H_{zy}[t,x]\delta y(t,x) + \delta y'(t,x)H_{yz}[t,x]\delta z(t,x)]dxdt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \delta u'(t,x)\Big(H_{uz}[t,x]\eta_3(t,x;\delta u) + H_{uy}[t,x]\eta_4(t,x;\delta u)\Big)dxdt +$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\eta_3'(t_1,x)\frac{\partial^2 F_1\big(x,z(t_1,x)\big)}{\partial z^2}\delta z(t_1,x)dx+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\eta_4'(t,x_1)\frac{\partial^2 F_2\big(t,y(t,x_1)\big)}{\partial y^2}\delta y(t,x_1)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t_0}^{t}V_{11}(t,x;\tau,x)\,f_u[\tau,x]\delta u(\tau,x)d\tau\right)'H_{zz}[t,x]\eta_3(t,x)dxdt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{x_0}^{x}V_{22}(t,x;t,s)g_u[t,s]\delta u(t,s)ds\right)'H_{yy}[t,x]\eta_4(t,x;\delta u)dxdt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\eta_3'(t,x;\delta u)H_{zz}[t,x]\delta z(t,x)\,dxdt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\eta_4'(t,x;\delta u)H_{yy}[t,x]\delta y(t,x)\,dxdt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}V_{11}(t_1,x;t,x)f_u[t,x]\delta u(t,x)\frac{\partial^2 F_1\big(x,z(t_1,x)\big)}{\partial z^2}\eta_3(t_1,x;\delta u)\,dxdt+$$

$$\left.+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}V_{22}(t,x_1;t,s)g_u[t,x]\delta u(t,x)\frac{\partial^2 F_2\big(t,y(t,x_1)\big)}{\partial y^2}\eta_4(t,x_1;\delta u)\,dxdt\right\}.$$

Здесь по определению

$$\eta_3(t,x;\delta u)=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}A(t,x;\tau,s)\delta u(\tau,s)dsd\tau,$$

$$\eta_4(t,x;\delta u)=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}B(t,x;\tau,s)\delta u(\tau,s)dsd\tau.$$

Теперь, считая, что $u(t,x)$ является оптимальным управлением, его специальную вариацию построим по формуле

$$\delta u_\varepsilon(t,x)=\begin{cases}l_1(t),(t,x)\in D_\varepsilon=[t_0,t_1]\times[\xi,\xi+\varepsilon),\\ 0, \qquad\qquad (t,x)\in D\backslash D_\varepsilon,\end{cases}\tag{18}$$

где $\varepsilon>0$ – достаточно малое число, $\xi\in[x_0,x_1)$, а $l_1(t)\in KC_r([t_0,t_1],R^r)$.

Обозначим через $(\delta z_\varepsilon(t,x),\delta y_\varepsilon(t,x))$ решение стохастического уравнения в вариациях (10)–(11), соответствующее вариации (17) управления $u(t,x)$.

Тогда из представлений (15), (16) следует, что почти для всех (t,x)

$$\delta z_\varepsilon(t,x) \sim \begin{cases} \varepsilon^0, (t,x) \in [t_0,t_1] \times [\xi, \xi+\varepsilon), \\ \varepsilon, (t,x) \in [t_0,t_1] \times [\xi+\varepsilon, x_1], \end{cases} \tag{19}$$

$$\delta y_\varepsilon(t,x) \sim \varepsilon, (t,x) \in [t_0,t_1] \times [\xi, x_1]. \tag{20}$$

Принимая во внимание оценки (19), (20) и требование неотрицательности второй вариации функционала (3) на оптимальном управлении, из представления (17) получим

$$\delta^2 S(u;\delta u_\varepsilon) =$$

$$-E\left\{\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} l_1'(\tau) f_u'[\tau,\xi] R(\xi,\tau,s) f_u[s,\xi] l_1(s)\,ds d\tau + \int_{t_0}^{t_1} l_1'(t) H_{uu}[t,\xi] l_1(t)\,dt\right.$$

$$\left. +2\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1} l_1'(\tau) H_{uz}[\tau,\xi] V_{11}(\tau,\xi;t,\xi)\,d\tau\right] f_u[t,\xi] l_1(t)\,dt\right\} + o(\varepsilon) \geq 0.$$

Отсюда в силу малости $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение

$$E\left\{\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} l_1'(\tau) f_u'[\tau,\xi] R(\xi,\tau,s) f_u[s,\xi] l_1(s)\,ds d\tau + \int_{t_0}^{t_1} l_1'(t) H_{uu}[t,\xi] l_1(t)\,dt +\right.$$

$$\left. +2\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1} l_1'(\tau) H_{uz}[\tau,\xi] V_{11}(\tau,\xi;t,\xi)\,d\tau\right] f_u[t,\xi] l_1(t)\,dt\right\} \leq 0$$

для всех $\xi \in [x_0,x_1)$, и $l_1(t) \in KC_r([t_0,t_1],R^r)$.

Исследуя неравенство (13) с учетом представления (17), на вариации управления вида

$$\delta u_\varepsilon(t,x) = \begin{cases} l_2(x), (t,x) \in D_\varepsilon = [\theta, \theta+\varepsilon) \times [x_0,x_1], \\ 0, (t,x) \in D/D_\varepsilon, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число, $\theta \in [t_0,t)$, $l_2(x) \in KC_r([x_0,x_1],R^r)$, симметричными рассуждениями доказывается, что вдоль оптимального процесса $\big(u(t,x), z(t,x), y(t,x)\big)$ выполняется неравенство

$$E\left\{\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1} l_2'(\tau)\, g_u[\theta,\tau] Q(\theta,\tau,s) g_u[\theta,s] l_2(s)\,ds d\tau +\right.$$

$$+\int_{x_0}^{x_1} l_2'(x) H_{uu}[\theta,x\} l_2(x)\,dx +$$

$$\left. +2\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{x}^{x_1} l_2'(s) H_{uy}[\theta,s] V_{22}(\theta,s;\theta,x)\,ds\right] f_u[\theta,x]\, l_2(x)\,dx\right\} \leq 0$$

для всех $\theta \in [t_0,t_1)$, $l_2(x) \in KC_r([x_0,x],R^r)$.

Следовательно, доказана

Теорема 2. Если допустимое управление $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера (14), то для оптимальности его в задаче (1)–(3) необходимо, чтобы выполнялись соотношения:

$$E\left\{\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} l_1(\tau)\, f_u[\tau,\xi]R(\xi,\tau,s)f_u[s,\xi]l_1(s)dsd\tau + \int_{t_0}^{t_1} l_1(t)H_{uu}[t,\xi\}l_1(t)dt + \right.$$

$$\left. +2\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1} l_1(\tau)H_{uz}[\tau,\xi]V_{11}(\tau,\xi;t,\xi)d\tau\right] f_u[t,\xi]\, l_1(t)dt\right\} \le 0 \qquad (21)$$

для всех $\xi \in [x_0, x_1), l_1(t) \in KC_r([t_0, t_1], R^r)$ и

$$E\left\{\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1} l_2(\tau)\, g_u[\theta,\tau]Q(\theta,\tau,s)g_u[\theta,s]l_2(s)dsd\tau + \right.$$

$$+\int_{x_0}^{x_1} l_2(x)H_{uu}[\theta,x\}l_2(x)dx +$$

$$\left. +2\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{x}^{x_1} l_2(s)H_{uy}[\theta,s]V_{22}(\theta,s;\theta,x)ds\right] f_u[\theta,x]\, l_2(x)dx\right\} \le 0 \qquad (22)$$

для всех $\theta \in [t_0, t_1), l_2(x) \in KC_r([x_0, x], R^r)$.

Заметим, что полученные необходимые условия оптимальности второго порядка сами являются источниками получения ряда более простых по структуре и удобных для проверки условий оптимальности второго порядка.

Непосредственным следствием условий теоремы 2 является стохастический аналог условия Лежандра – Клебша для рассматриваемой задачи управления (1)–(3):

Следствие 1 (аналог условия Лежандра – Клебша). Вдоль оптимального процесса $(u(t,x), z(t,x), y(t,x))$ для всех $v \in R^r, (\theta,\xi) \in [t_0,t_1) \times [x_0,x_1)$

$$Ev'H_{uu}[\theta,\xi]v \le 0.$$

Введем обозначения:

$$L_1(\theta,\xi,l_1(t)) = \int_{\theta}^{t_1} [V'_{11}(\tau,\xi;\theta,\xi)\, H_{zu}[\tau,\xi] + R(\xi,\theta,\tau)f_u[\tau,\xi]]l_1(\tau)d\tau, \qquad (23)$$

$$L_2(\theta,\xi,l_2(x) = \int_{\xi}^{x_1} [V_{22}(\theta,s;\theta,\xi)\, H_{yu}[\theta,s] + Q(\theta,\xi,s)g_u[\theta,s]]l_2(s)ds, \qquad (24)$$

$$P_1(\theta,\xi,l_1(t)) = \int_{\theta}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1} l'_1(s)H_{uz}[s,\xi]V_{11}(s,\xi;t,\xi)\, ds\right] f_u[t,\xi]l_1(t)dt +$$

$$+\int_{\theta}^{t_1} l'_1\,(t)f_u[t,\xi]\left[\int_{t}^{t_1} V_{11}(s,\xi;t,\xi)H_{zu}[s,\xi]\, l_1(s)ds\right]dt + \qquad (25)$$

$$\int_{\theta}^{t_1} l'_1(t)\, H_{uu}[t,\xi]l_1(t)dt + \int_{\theta}^{t_1}\int_{\theta}^{t_1} l'_1(\tau)\, f_u[\tau,\xi]R(\xi,\tau,s)f_u[s,\xi]l_1(s)dsd\tau,$$

$$P_2(\theta,\xi,l_2(x)) = \int_{\xi}^{x_1}\left[\int_{x}^{x_1} l_2'(s)H_{uy}[\theta,s]V_{22}(\theta,s;\theta,x)\,ds\right]g_u[\theta,x]l_2(x)dx +$$

$$+\int_{\xi}^{x_1} l_2(x)g_u[\theta,x]\left[\int_{x}^{x_1} V_{22}(\theta,x;\theta,x)H_{yu}[\theta,s]\,l_2(s)ds\right]dx + \tag{26}$$

$$+\int_{\xi}^{x_1} l_2'(x)\,H_{uu}[\theta,x]l_2(x)dx + \int_{\xi}^{x_1}\int_{\xi}^{x_1} l_2(\tau)\,g_u[\theta,\tau]Q(\theta,\tau,s)g_u[\theta,s]l_2(s)dsd\tau.$$

Полагая соответственно в неравенствах (21) и (22)

$$l_1(t) = \begin{cases} 0, \ t\in[t_0,\theta), \\ e_1(t), t\in[\theta,t_1], \end{cases} \quad l_2(x) = \begin{cases} 0, \ x\in[x_0,\xi), \\ e_1(t), t\in[\xi,x] \end{cases}$$

и учитывая обозначения $P_1(\theta,\xi,l_1(t))$ и $P_2(\theta,\xi,l_2(x))$, следует справедливость следующего поточечного необходимого условия оптимальности.

Теорема 3. Если $u(t,x)$ – оптимальное управление в стохастической задаче (1)–(3), то вдоль процесса $(u(t,x),z(t,x),y(t,x))$ для всех $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$ выполняются неравенства

$$EP_1(\theta,\xi,e_1(t)) \le 0, \qquad \forall e_1(t)\in KC_r([t_0,t_1],R^r),$$

$$EP_2(\theta,\xi,e_2(x)) \le 0, \qquad \forall e_2(x)\in KC_r([x_0,x_1],R^r).$$

Здесь $P_1(\theta,\xi,e_1(t)), P_2(\theta,\xi,e_2(x))$ определяются соответственно формулами (25), (26).

Теперь снова принимаем во внимание $L_i(\theta,\xi,l_i(.)$ и $P_i(\theta,\xi,l_i(.)), i=1{,}2$.

Тогда с учетом матричных функций $R(x,\tau,s), Q(t,\tau,s)$ с непосредственным дифференцированием получаем, что $L_i(\theta,\xi,l_i(.)$ и $P_i(\theta,\xi,l_i(.)), i=1{,}2$ являются соответственно решениями следующих стохастических задач:

$$\frac{\partial L_1(\theta,\xi,l_1)}{\partial\theta} = -\left(f_z[\theta,\xi] + p[\theta,\xi]\frac{\partial W_1(\theta,\xi)}{\partial\theta}\right)' L_1(\theta,\xi,l_1)$$
$$-(H_{zu}[\theta,\xi] + R(\xi,\theta,\theta)f_u[\theta,\xi])l_1(\theta), L_1(t_1,\xi,l_1) = 0,$$

$$\frac{\partial P_1(\theta,\xi,l_1)}{\partial\theta} = l_1'(\theta)f_u[\theta,\xi]L_1(\theta,\xi,l_1) - l_1'(\theta)H_{uu}[\theta,\xi]l_1(\theta) -$$

$$-L_1(\theta,\xi,l_1)f_u[\theta,\xi]l_1(\theta), \ \ P_1(t_1,\xi,l_1) = 0,$$

$$\frac{\partial L_2(\theta,\xi,l_2)}{\partial\xi} = -\left(g_y[\theta,\xi] + q[\theta,\xi]\frac{\partial W_2(\theta,\xi)}{\partial\xi}\right)' L_2(\theta,\xi,l_2) -$$

$$-\big(H_{yu}[\theta,\xi] + Q(\theta,\xi,\xi)g_u[\theta,\xi]\big)l_2(\xi), L_2(\theta,x_1,l_2) = 0,$$

$$\frac{\partial P_2(\theta,\xi,l_2)}{\partial\xi} = l_2'(\xi)g_u[\theta,\xi]L_2(\theta,\xi,l_2) - l_2'(\xi)H_{uu}[\theta,\xi]l_2(\xi) -$$

$$-L_2(\theta,\xi,l_2)g_u[\theta,\xi]l_2(\theta), \ \ P_2(\theta,x_1,l_2) = 0.$$

Отсюда следует, что если положить $l_1(t) \equiv w_1 \in R^r, l_2(x) \equiv w_2 \in R^r$, то

$$L_i(\theta, \xi, w_i) = Z_i(\theta, \xi) w_i; P_i(\theta, \xi, w_i) = w_i' M_i(\theta, \xi) w_i, i = 1,2.$$

Здесь $Z_i(\theta, \xi), M_i(\theta, \xi)$ являются соответственно решениями следующих стохастических задач:

$$\frac{\partial Z_1(\theta,\xi)}{\partial \theta} = -\left(f_z[\theta,\xi] + p[\theta,\xi]\frac{\partial W_1(\theta,\xi)}{\partial \theta}\right)' Z_1(\theta,\xi)$$
$$-(H_{zu}[\theta,\xi] + R(\xi,\theta,\theta) f_u[\theta,\xi]), Z_1(t_1,\xi) = 0,$$

$$\frac{\partial Z_2(\theta,\xi)}{\partial \xi} = -\left(g_y[\theta,\xi] + q[\theta,\xi]\frac{\partial W_1(\theta,\xi)}{\partial \xi}\right)' Z_2(\theta,\xi) -$$

$$-\big(H_{yu}[\theta,\xi] + Q(\theta,\xi,\xi) g_u[\theta,\xi]\big), Z_2(\theta,x_1) = 0,$$

$$\frac{\partial M_1(\theta,\xi)}{\partial \theta} = f_u[\theta,\xi] Z_1(\theta,\xi) - H_{uu}[\theta,\xi] - Z_1(\theta,\xi) f_u[\theta,\xi],\ \ M_1(t_1,\xi) = 0,$$

$$\frac{\partial M_2(\theta,\xi)}{\partial \xi} = g_u[\theta,\xi] Z_2(\theta,\xi) - H_{uu}[\theta,\xi] - Z_2(\theta,\xi) g_u[\theta,\xi],\ \ M_2(\theta,x_1) = 0.$$

Следствие 2. При сделанных предположениях для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ в рассматриваемой стохастической задаче управления (1)–(3) необходимо, чтобы неравенства

$$E w_1' M_1(\theta,\xi) w_1 \le 0,$$

$$E w_2' M_2(\theta,\xi) w_2 \le 0$$

выполнялись для всех $w_i \in R^r, i = 1,2,$ и $(\theta,\xi) \in [t_0,t_1) \times [x_0,x_1)$.

Теперь перейдем к изучению случая вырождения условия Лежандра – Клебша.

Определение [6]. Допустимое управление $u(t,x)$ назовем особым, в классическом смысле, управлением в стохастической задаче (1)–(3), если для всех $(\theta,\xi) \in [t_0,t_1) \times [x_0,x_1)$ и $v \in R^r$

$$E H_u[\theta,\xi] = 0, E v' H_{uu}[\theta,\xi] v = 0.$$

Имеет место

Теорема 4. Для оптимальности особого, в классическом смысле, управления $u(t,x)$ в стохастической задаче (1)–(3) необходимо, чтобы выполнялись следующие интегральные необходимые условия оптимальности:

$$E v' \left[\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} f_u[\tau,\theta]\, R(\xi,\tau,s) f_u[s,\xi] ds d\tau + \right.$$

$$\left. +2\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1} H_{uz}[\tau,\xi]\, V_{11}(\tau,\xi;t,\xi) d\tau\right] f_u[t,\xi]\, dt\right] v \le 0$$

для всех $v \in R^r, \xi \in [x_0,x_1)$,

$$Ev'\left[\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1} g_u[\theta,\tau]\,Q(\theta,\tau,s)g_u[\theta,s]dsd\tau+\right.$$

$$\left.+2\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{x}^{x_1} H_{uy}[\theta,s]\,V_{22}(\theta,s;\theta,x)ds\right]g_u[\theta,x]\,dx\right]v\le 0$$

для всех $v\in\ R^r,\theta\in\ [t_0,t_1)$.

Последнее неравенство позволяет нам получить поточечные необходимые условия оптимальности особых, в классическом смысле, управлений.

С этой целью для дальнейших изложений ведем следующие обозначения:

$$C(\theta,\xi,v)=v'[f_u'[\theta,\xi]R(\xi,\theta,\theta)f_u[\theta,\xi]+H_{zu}[\theta,\xi]f_u[\theta,\xi]]v,$$

$$D(\theta,\xi,v)=v'\big[g_u'[\theta,\xi]Q(\theta,\xi,\xi)g_u[\theta,\xi]+H_{yu}[\theta,\xi]g_u[\theta,\xi]\big]v.$$

Имеют место следующие поточечные необходимые условия оптимальности особых, в классическом смысле, управлений.

Теорема 5. Если $u(t,x)$ особое, в классическом смысле, оптимальное управление в задаче (1)–(3), то для всех $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$ выполняются соотношения:

$$E[C(\theta,\xi,v)+2L_1'(\theta,\xi,e_1)f_u[\theta,\xi]v+P_1(\theta,\xi,e_1)]\le 0 \qquad (27)$$

для всех $v\in R^r,e_1(t)\in KC_r([t_0,t_1],R^r)$,

$$E[D(\theta,\xi,v)+2L_2'(\theta,\xi,e_2)g_u[\theta,\xi]v+P_2(\theta,\xi,e_2)]\le 0 \qquad (28)$$

для всех $v\in R^r,\ e_2(x)\in KC_r([x_0,x_1],R^r)$.

Для доказательства обратимся к соотношению (21) и здесь вариацию $l_1(t)$ положим как

$$l_1(t)=\begin{cases}0,t\in[t_0,\theta),\\ v,t\in[\theta,\theta+\varepsilon),\\ \varepsilon e_1(t),\end{cases}$$

где $\varepsilon>0,v\in R^r,e_1(t)\in KC_r([t_0,t_1],R^r)$.

Тогда с учетом обозначений (23)–(26) неравенство (21) принимает вид

$$E\varepsilon^2[C(\theta,\xi,v)+2L_1'(\theta,\xi,e_1)f_u[\theta,\xi]v+P_1(\theta,\xi,e_1)]+o(\varepsilon^2)\le 0.$$

Отсюда, в силу достаточной малости $\varepsilon>0$, следует неравенство (27). А в неравенстве (22), вариацию $l_2(x)$ определяя

$$l_2(x)=\begin{cases}0,x\in[x_0,\xi),\\ v,x\in[\xi,\xi+\varepsilon),\\ \varepsilon e_2(x),\end{cases}$$

где $e_2(x)\in KC_r([x_0,x_1],R^r)$, симметрическими рассуждениями получаем неравенство (28), что и требовалось доказать.

Следствие 3. Если $u(t,x)$ – особое, в классическом смысле, оптимальное управление в задаче (1)–(3), то для всех $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$ выполняются соотношения:

$$EC(\theta,\xi,v)\le 0,$$

$$ED(\theta,\xi,v)\le 0.$$

4. Заключение

Изучается стохастическая задача оптимального управления, описываемая системами нелинейных стохастических гиперболических уравнений первого порядка в каноническом виде. При предположении открытости областей управления установлены необходимые условия оптимальности первого и второго порядка, в том числе исследована на оптимальность классическая экстремаль.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мансимов К. Б.* К теории необходимых условий оптимальности в одной задаче с распределенными параметрами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. Т. 41. № 10. С. 1505–1520.

2. *Мансимов К. Б.* Исследование квазиособых процессов в одной задаче управления химическим реактором // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. № 4. С. 540–546.

3. *Васильев О. В., Терлецкий В. А.* К оптимизации одного класса управляемых систем с распределенными параметрами // Оптимизация динамических систем. 1978. С. 26–30.

4. *Мансимов К. Б., Масталиев Р. О.* Необходимые условия оптимальности первого порядка в одной стохастической задаче управления с распределенными параметрами // ВСПУ/ИПУ РАН. 2024. С. 547–549.

5. *Mansimov K. B., Mastaliyev R. O.* Analog of Euler equation and second order necessary optimality conditions for Rosser type continuous stochastic control problem // COIA-2024. 27–29 august. Istanbul. Turkiye. Pp. 567–570.

6. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Особые оптимальные управления. М.: URSS, 2018. 256 с.

7. *Мансимов К. Б., Марданов М. Дж.* Качественная теория оптимального управления системами Гурса–Дарбу. Баку: Элм, 2010. 360 с.

8. *Lu Q., Zhang X.* Control theory for stochastic distributed parameters systems an engineering perspective // Annual Reviews in Control. 2021. Vol. 51. No. 6. Pp. 268–330. DOI: 10.1016/j.arcontrol.2021.04.002

9. *Рачинский В. В.* Введение в общую теорию динамики сорбции и хроматографии. М.: Наука, 1964. 136 с.

10. *Хрычев Д. А.* Об одном стохастическом квазилинейном гиперболическом уравнении // Математический сборник. 1981. Т. 116(158). № 3(11). С. 398–426.

11. *Васьковский М. М.* О решениях стохастических гиперболических уравнений с запаздыванием с измеримыми локально ограниченными коэффициентами // Вестник БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. 2012. № 2. С. 115–121. EDN: RUPPAR

12. *Мансимов К. Б., Масталиев Р. О.* О представлении решения краевой задачи Гурса для стохастических гиперболических уравнений с частными производными первого порядка // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2023. Т. 45. С. 145–151. DOI: 10.26516/1997-7670.2023.45.145

13. *Масталиев Р. О.* Необходимые условия оптимальности первого порядка в стохастических системах Гурса–Дарбу // Дальневосточный математический журнал. 2021. Т. 21. № 1. С. 89–104. DOI: 10.47910/FEMJ202108

14. *Мансимов К. Б., Керимова А. В.* Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в одной ступенчатой задаче управления, описываемой разностным и интегро-дифференциальным уравнениями типа Вольтерра // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2024. Т. 64. № 10. С. 1868–1880. DOI: 10.31857/S0044466924100072

15. *Рзаева В. Г.* Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в одной задаче оптимального управления, описываемой системой гиперболических интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 62. С. 4–12. DOI: 10.17223/19988605/62/1

16. *Бутома А. М., Сотская Л. И.* Вариационное исчисление и оптимальное управление. Могилев: Белорусско-Российский университет, 2021. 46 с.

REFERENCES

1. Mansimov K.B. On the theory of necessary optimality conditions in one problem with distributed parameters. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2001. Vol. 41. No. 10. Pp. 1429–1443. (In Russian)

2. Mansimov K.B. Study of quasi-singular processes in one problem of chemical reactor control. *Differential equations*. 1997. Vol. 33. No. 4. Pp. 544–551. (In Russian)

3. Vasiliev O.V., Terletsky V.A. On the optimization of one class of controlled systems with distributed parameters. *Optimization of dynamic systems*. Minsk.1978. Pp. 26-30. (In Russian)

4. Mansimov K.B., Mastaliev R.O. Necessary conditions for first-order optimality in one stochastic control problem with distributed parameters. *VSPU/IPU RAS*. 2024. Pp. 547–549. (In Russian)

5. Mansimov K.B., Mastaliyev R.O. Analog of Euler equation and second order necessary optimality conditions for Rosser type continuous stochastic control problem. *COIA-2024*. 27–29 august. Istanbul. Turkiye. Pp. 567–570.

6. Gabasov R., Kirillova F.M. *Osobyye optimal'nyye upravleniya* [Singular optimal controls]. Moscow: URSS, 2018. 256 p. (In Russian)

7. Mansimov K.B., Mardanov M.J. *Kachestvennaya teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami Gursa–Darbu* [Qualitative theory of optimal control of Goursat-Darboux systems]. Baku: Elm, 2010. 360 p. (In Russian)

8. Lu Q., Zhang X. Control theory for stochastic distributed parameters systems an engineering perspective. *Annual Reviews in Control*. 2021.Vol. 51. No. 6. Pp. 268–330. DOI: 10.1016/j.arcontrol.2021.04.002

9. Rachinsky V.V. *Vvedeniye v obshchuyu teoriyu dinamiki sorbtsii i khromatografii* [Introduction to the General Theory of Sorption and Chromatography Dynamics]. Moscow: Nauka, 1964. 136 p. (In Russian)

10. Khrychev D.A. On one stochastic quasilinear hyperbolic equation. *Sbornik: Mathematics*. 1981. Vol. 116(158). No. 3(11). Pp. 398–426. DOI: 10.1070/SM1983v044n03ABEH000972. (In Russian)

11. Vas'kovsky M.M. On solutions of stochastic hyperbolic equations with delay with measurable locally bounded coefficients. *Bulletin of BSU. Series 1. Physics, Mathematics, Informatics*. 2012. No. 2. Pp. 115–121. EDN: RUPPAR. (In Russian)

12. Mansimov K.B., Mastaliev R.O. On the representation of the solution of the Goursat boundary value problem for stochastic hyperbolic partial differential equations of the first order. *Bulletin of the Irkutsk State University, series. Mathematics.* 2023. Vol. 45. Pp. 145–151. DOI: 10.26516/1997-7670.2023.45.145. (In Russian)

13. Mastaliev R.O. Necessary conditions for first-order optimality in stochastic Goursat – Darboux systems. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2021. Vol. 21. No. 1. Pp. 89–104. DOI: 10.47910/FEMJ202108. (In Russian)

14. Mansimov K.B., Kerimova A.V. Necessary optimality conditions of the first and second orders in one step control problem described by difference and integro-differential equations of Volterra type. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2024. Vol. 64. No. 10. Pp. 2256–2268. DOI: 10.31857/S0044466924100072. (In Russian)

15. Rzaeva V.G. Necessary optimality conditions of the first and second orders in one optimal control problem described by a system of hyperbolic integro-differential equations of the Volterra type. *Bulletin of Tomsk State University. Management, Computer Science and Information Science*. 2023. No. 62. Pp. 4–12. DOI: 10.17223/19988605/62/1. (In Russian)

16. Butoma A.M., Sotskaya L.I. *Variatsionnoye ischisleniye i optimal'noye upravleniye* [Variational Calculus and Optimal Control]. Mogilev: Belarusian-Russian University, 2021. 46 p. (In Russian)

Финансирование. Исследование проведено без спонсорской поддержки.

Funding. The study was performed without external funding.

Информация об авторе

Масталиев Рашад Октай оглы, д-р философии по математике, доцент, зав. кафедрой математики и информатики университета «Азербайджан»;

Az1007, Азербайджан, г. Баку, ул. Дж. Гаджибейли, 71;

вед. науч. сотр., Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджанской Республики;

Az1141, Азербайджан, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 68;

mastaliyevrashad@gmail.com; rashad.mastaliyev@au.edu.az, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6387-2146

SPIN-код: 4056-5919

Information about the author

Rashad O. Mastaliyev, PhD Mathematics, Associate Professor, Head of the Department of Mathematic and Informatic of the Azerbaijan University;

Az1007, Azerbaijan, Baku, 71 J. Hajibeyli street;

Leading Researcher at the Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan;

Az1141, Azerbaijan, Baku, 68 B. Vahabzade street;

mastaliyevrashad@gmail.com; rashad.mastaliyev@au.edu.az, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6387-2146

SPIN-code: 4056-5919